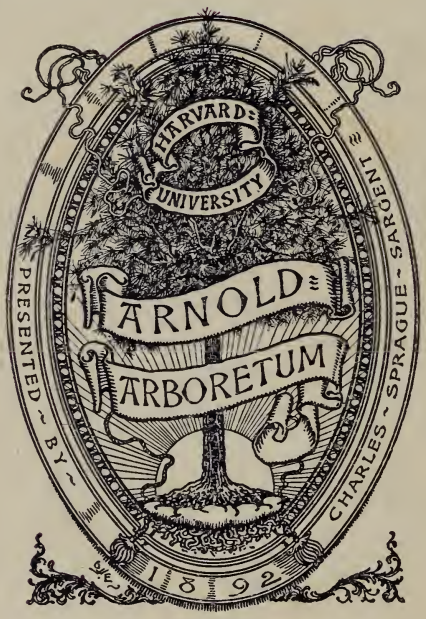
3 2044 106 337 306

Per Neth
A-4



ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot** et **S. C. Snellen van Vollenhoven.**

TOME XIV.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1879.

ARNOLD ARBORETUM
HARVARD UNIVERSITY

TABLE DES MATIÈRES.

Programme de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem pour l'année 1878 ..... Pag. I—VIII.

H. ONNEN, Note concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes ..... " 1.

P. L. RIJKE, Sur le microphone ..... " 76.

R. A. MEES, Sur la théorie du radiomètre ..... " 97.

C. H. C. GRINWIS, Sur une détermination simple de la fonction caractéristique ..... " 130.

J. A. C. OUDEMANS, Sur l'orbite annuelle que les étoiles fixes semblent décrire au ciel par suite de l'aberration de la lumière... " 143.

P. A. BERGSMA, L'influence des phases de la lune sur la température de l'air à Batavia ..... " 155.

G. F. W. BAEHR, Sur le principe de la moindre action ..... " 163.

M. SNELLEN, Le télémétéorographe d'Olland ..... " 180.

C. A. J. A. OUDEMANS, Révision des champignons trouvés jusqu'à ce jour dans les Pays-Bas ..... " 209.

W. KOSTER, Sur la signification génétique des muscles extenseurs des doigts ..... " 320.

N. W. P. Rauwenhoff, Sur les premiers phénomènes de la germination des spores des cryptogames ..... Pag. 347.

D. Bierens de Haan, Note sur le nombre de fois, qu'avec un nombre donné de dés, on peut jeter une somme donnée; et sur une application de cette règle..... " 370.

F. Seelheim, Les lois de la perméabilité du sol..... " 393.

P. Harting, Déterminations thermométriques faites dans un puits de 369 mètres de profondeur, à Utrecht..... ..... " 463.

TOME XIV. 1me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et S. C. Snellen van Vollenhoven.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1879.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

NOTES CONCERNANT LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ESSENTIELLES DES COURBES PLANES,

PAR

H. ONNEN.

L'équation essentielle d'une courbe (*Arch. néerl.*, t. X., p. 361 et suiv.) exprime la manière dont la courbe change d'un point au suivant; elle indique donc comment un point doit se mouvoir pour rester sur la courbe. Si l'on se représente ce point parcourant une ligne droite, tandis que celle-ci tourne continuellement autour du point mobile, la forme de la courbe sera déterminée à chaque instant par le rapport entre la vitesse linéaire du point sur la droite et la vitesse angulaire de cette droite; or, ce rapport est précisément le rayon de courbure.

Supposons qu'on attribue à un point un certain mode de mouvement, et qu'à l'aide des conditions données à cet égard, on parvienne à exprimer, pour une position quelconque du point mobile, le rapport des deux vitesses dont il vient d'être question; on aura alors trouvé une équation de la courbe, qui est son

ARNOLD ARBORETUM
HARVARD UNIVERSITY

équation essentielle, ou qui du moins est étroitement liée à celle-ci. De cette manière, la cinématique fournit souvent un utile secours pour le développement des équations essentielles des courbes.

C'est ainsi que M. Ernest Lamarle, professeur à Gand, a obtenu, dans son *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral*, des procédés simples de construction et de calcul pour le rayon de courbure de beaucoup de lignes courbes. Il a même fondé son calcul différentiel tout entier sur la cinématique, car il regarde le coefficient différentiel, en général, comme le rapport de deux vitesses. Je laisse de côté la question de savoir si cette manière de traiter le calcul différentiel est préférable aux méthodes ordinaires d'exposition; mais, dans les applications géométriques, il y a incontestablement de l'avantage, en beaucoup de cas, à remplacer les différentielles par les vitesses. On doit reconnaître, toutefois, qu'une adresse peu commune dans le choix des éléments d'une figure géométrique est souvent nécessaire pour arriver à des résultats aussi simples que ceux présentés par M. Lamarle. Lui-même, en parlant des propriétés simples qui se laissent découvrir dans les formes et figures composées, où elles sont en quelque sorte cachées, dit: „*il faut pour cela quelque effort d'invention*"; et il me semble en effet, dans ces sortes de révélations, avoir fait preuve d'une pénétration remarquable.

L'exposition que je vais faire des courbes cycloïdales a pour fondement la méthode cinématique de M. Lamarle. La formule qu'il donne pour le rayon de courbure d'une ligne cycloïdale est la même que celle qui sera déduite, d'une manière un peu différente, dans les pages suivantes. Je me suis écarté de la marche de son raisonnement, afin de ne pas être obligé de faire usage de propositions et de propriétés qu'il faudrait commencer par démontrer, si l'on voulait être complet.

Je ne puis toutefois aborder l'étude des courbes cycloïdales sans citer le Mémoire bien connu qui leur a été consacré par M. D. G. Cramer. Il est naturel qu'en prenant un autre point de départ et en employant une autre méthode pour traiter un

même sujet, on soit aussi conduit à des points de vue différents. Les équations essentielles, et celles qui leur sont analogues, conviennent surtout pour suivre les courbes dans leur *cours* et apprendre à connaître les particularités qu'elles offrent sous ce rapport. Je me suis donc occupé plus spécialement des différentes *formes* qui peuvent se présenter, dans des circonstances différentes, chez les courbes cycloïdales prises en général; tandis que M. Cramer s'est proposé de donner une *théorie complète* de ces courbes, en y appliquant la méthode analytique pure.

1. Construction et calcul du rayon de courbure d'une ligne cycloïdale.

Soient $$R = f(u) \text{ et } R' = F(v)$$
les équations essentielles des deux courbes, la première représentant la courbe génératrice, la seconde la courbe directrice. Au sujet de ces équations, on suppose seulement que, lorsque les courbes se touchent en un point où l'on a $u = u_1$ pour la première courbe et $v = v_1$ pour la seconde, les valeurs correspondantes de R et R' ont des signes égaux ou contraires, suivant que les rayons de courbure des deux courbes sont situés au même côté ou aux côtés opposés de la tangente commune. En effet, si ds désigne l'élément d'arc de la première courbe, et ds' celui de la seconde, le même signe doit toujours être attribué à ces différentielles, puisque le point de contact commun, en avançant le long de la tangente commune, parcourt à la fois les deux courbes. La question de savoir si R et R' ont des signes égaux ou opposés dépend donc uniquement de du et de dv; si celles-ci sont toutes les deux positives, — c'est-à-dire, si la tangente doit tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour parcourir chacune des deux courbes, — R et R' se trouvent toutes les deux à droite de la tangente; si du et dv sont l'une et l'autre négatives, R et R' sont situées toutes les deux à gauche de la tangente; mais si du et dv prennent des signes opposés,

les rayons de courbure se placent de part et d'autre de la tangente. Pour distinguer ces situations relatives des rayons de courbure au point de contact, il est d'usage de parler de *lignes épicycloïdales* et de *lignes hypocycloïdales*. Mais, bien qu'on puisse toujours se figurer la courbe génératrice roulant de deux manières différentes le long de la directrice, on ne saurait pourtant indiquer, pour chacune des lignes cycloïdales ainsi engendrées, une propriété par laquelle les unes seraient caractérisées comme épicycloïdales, les autres comme hypocycloïdales. Car une même cycloïdale peut être épicycloïdale en un point et hypocycloïdale en un autre. Cela arrivera chaque fois qu'une des deux courbes ou toutes les deux auront des points de rebroussement ou d'inflexion, à moins qu'un pareil point d'une des courbes ne coïncide accidentellement avec un point de rebroussement ou d'inflexion de l'autre courbe; dans ce dernier cas, en effet, les deux rayons de courbure changent simultanément de signe, et tombent par conséquent en même temps de l'autre côté de la tangente. En général cependant, à chaque point de rebroussement ou d'inflexion, la courbe deviendra hypocycloïdale si elle était épicycloïdale, ou réciproquement.

Tout ce qui peut être dit concernant les deux cycloïdales qu'on obtient en faisant rouler la courbe génératrice aux deux côtés de la directrice, c'est que, *en des points correspondants*, *elles sont anti-cycloïdales*, — expression dont le sens n'a sans doute pas besoin d'être éclairci.

Dans la fig. 1 (Pl. I), K représente la courbe génératrice, et K' la courbe directrice; C est le centre de courbure de la première, C′ celui de la seconde, au moment où elles se touchent en A; P est le point qui décrit la cycloïdale.

Imaginons d'abord que le point A parcoure la directrice K'; il se meut alors avec une certaine vitesse AB sur la tangente ST, tandis que celle-ci tourne autour de A avec une vitesse angulaire $\frac{AB}{AC'}$. Figurons-nous ensuite que la courbe K, sans changer de situation par rapport à la tangente, participe à ce

mouvement : chaque point de son plan a alors une vitesse perpendiculaire et proportionnelle à la droite qui joint ce point à A. Ainsi, par suite de *ce premier* mouvement, le point P acquiert une vitesse perpendiculaire à PA et égale à $PA.\frac{AB}{AC'}$. Mais, en même temps, la courbe K roule sur la tangente, et le changement qui en résulte dans la situation relative de K et ST est le même que si la tangente roulait sur la courbe ; seulement, au lieu que la tangente tourne autour de A, avec la vitesse angulaire $\frac{AB}{AC}$, *dans le même sens* que les aiguilles d'une montre, la courbe tourne maintenant autour de A, *avec la même vitesse angulaire, en sens opposé.* Par suite de *ce second* mouvement, chaque point du plan de la courbe K acquiert donc une seconde vitesse, perpendiculaire et proportionnelle à sa distance à A, — mais en sens opposé de la première vitesse. Pour P, cette vitesse est $-PA.\frac{AB}{AC}$. En somme, la vitesse de P, à un instant quelconque, est donc représentée en direction et en grandeur par

$$PA\left(\frac{AB}{AC'}-\frac{AB}{AC}\right)=\frac{PA.(AC-AC')AB}{AC.AC'}.$$

Soit PM la vitesse ainsi trouvée de P. Décomposons la vitesse AB en AD, dirigée suivant AP, et en AE, perpendiculaire à AP ; si O désigne le centre de courbure de la cycloïdale, les expressions $\frac{AE}{AO}$ et $\frac{PM}{PO}$ représenteront l'une et l'autre la vitesse angulaire avec laquelle tourne la normale. Par conséquent, le point d'intersection des droites ME et PA est le centre de courbure O, et PO est le rayon de courbure.

La construction du point O devient extrêmement simple quand on choisit pour le point E l'intersection de la perpendiculaire AE avec PC ; en menant alors EB || PA, la longueur AB, qui peut d'ailleurs être prise arbitrairement, devient égale à

$\frac{AE}{AP}.AL$, si L est l'intersection de PM et de AC. C'est le cas de notre figure, et on a alors

$$PM = \frac{AC - AC'}{AC.AC'}.PA.AB = \frac{AC - AC'}{AC.AC'}.AE.AL,$$

et
$$PL = \frac{AE \times CL}{AC} = \frac{AL - AC}{AC}.AE;$$

d'où

$$LM = PM + PL = \frac{AC.AE(AL - AC')}{AC.AC'} = \frac{AE.LC'}{AC'};$$

ce qui montre que la droite MOE passe aussi par C'.

De là résulte la construction suivante:

Joignez le point générateur P *au point de contact* A *et au centre de courbure* C *de la courbe génératrice. Elevez en* A *une perpendiculaire à* AP, *qui coupera* PC *en* E; *l'intersection de* AP *et de la droite qui joint* E *au centre de courbure* C' *de la ligne directrice sera le centre de courbure* O *de la cycloïdale.*

En posant $AC = R$, $AC' = R'$, $PA = r$, angle $PAC = \alpha$, on trouve l'expression suivante pour le rayon de courbure $PO = \varrho$. Comme $AE = AB \cos\alpha$, on a immédiatement

$$\frac{PM}{AB\cos\alpha} = \frac{\varrho}{r - \varrho} \text{ ou } \varrho = \frac{PM.r}{PM + AB\cos\alpha}.$$

Mais
$$PM = \frac{(R - R')r}{RR'}.AB,$$

donc
$$\varrho = \frac{R - R')r^2}{(R - R')r + RR'\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Cette équation est la base de tous nos développements ultérieurs.

---

2. L'équation essentielle proprement dite d'une courbe cycloïdale.

Nous commencerons par introduire quelques nouvelles grandeurs variables. A cet effet, considérons le triangle PAC, formé par le point générateur P, le point de contact de la courbe génératrice K et le centre de courbure correspondant C, c'est-à-dire, le point correspondant de la développée, courbe que nous désignerons par K_{-1}. En joignant le point générateur avec différents points de K, et en outre avec les points correspondants de K_{-1}, on obtient les différentes formes que prend ce triangle lorsque la courbe génératrice touche la directrice aux points choisis. Le changement de forme que le triangle PAC subit, pendant que le point A parcourt la courbe K et le point C la développée K_{-1}, consiste en ce que le point A se meut avec une vitesse $AD = AB \sin\alpha$ sur PA, en même temps que cette droite tourne avec la vitesse angulaire $\frac{AE}{PA} = \frac{AB \cos\alpha}{r}$ autour de P. Si, en outre, CB_{-1} est la vitesse avec laquelle le point C parcourt à ce moment la courbe K_{-1}, ce point possède une vitesse $CD_{-1} = CB_{-1} \sin\alpha_{-1}$ suivant le côté PC, et ce côté une vitesse angulaire $\frac{CE_{-1}}{PC} = \frac{CB_{-1} \cos\alpha_{-1}}{r_{-1}}$ autour du point P; expressions où α_{-1} et r_{-1} désignent les mêmes grandeurs par rapport à la courbe K_{-1} que α et r par rapport à K. Mais les vitesses trouvées sont proportionnelles aux différentielles des chemins parcourus. Or l'élément d'arc de la courbe K est égal à $R\,du$, et celui de la courbe K_{-1} égal à $dR = R_{-1}\,du$, si R_{-1} représente le rayon de courbure $C_{-1}C$ de la développée. En désignant, de plus, par $d\varphi$ et $d\varphi_{-1}$ les éléments angulaires décrits par les rayons vecteurs PA et PC, on a

$$dr = R \sin\alpha\, du, \quad . \; . \; . \; (2) \qquad r\,d\varphi = R \cos\alpha\, du, \quad . \; . \; . \; (4)$$

$$dr_{-1} = R_{-1} \sin\alpha_{-1}\, du, \quad . \; . \; (3) \qquad r_{-1}\,d\varphi_{-1} = R_{-1} \cos\alpha_{-1}\, du. \quad (5)$$

Mais $$d\varphi - du = d\alpha,$$

et $$d\varphi_{-1} - du = d\alpha_{-1};$$

donc $$r(du + d\alpha) = R\cos\alpha\, du,$$

et $$r_{-1}(du + d\alpha_{-1}) = R_{-1}\cos\alpha_{-1}\, du;$$

ou $$d\alpha = \frac{R\cos\alpha - r}{r}\, du, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

et $$d\alpha_{-1} = \frac{R_{-1}\cos\alpha_{-1} - r_{-1}}{r_{-1}}\, du. \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Par l'intégration des équations différentielles simultanées (2) et (6), on trouve r et α en fonction de u. Le même résultat peut être obtenu en résolvant (3) et (7) par rapport à r_{-1} et α_{-1}, et calculant ensuite r et α à l'aide des relations trigonométriques

$$r^2 = r^2_{-1} + R^2 - 2\, r_{-1} R \sin\alpha_{-1}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$r\sin\alpha = r_{-1}\cos\alpha_{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Si les valeurs trouvées pour r et α sont substituées dans (1), ϱ est exprimé en fonction de u et de v. On peut déterminer les constantes des intégrations en admettant que le mouvement commence au moment où $u = 0$, et qu'alors $\alpha = \alpha_0$, $r = r_0$, $\alpha_{-1} = (\alpha_{-1})_0$ et $r_{-1} = (r_{-1})_0$. Les grandeurs α_0, r_0, et $(r_{-1})_0$ sont déterminées par la position du point P dans le plan de la courbe K.

L'égalité des arcs que le point A parcourt sur les deux courbes K et K' est exprimée par

$$\int_0^u R\, du = \int_{v_0}^v R'\, dv,$$

si v_0 est la valeur de v dans le point où la courbe directrice est touchée par la courbe génératrice au moment où le mouvement commence. A l'aide de (10) on peut éliminer v ou u, de sorte que ϱ est alors exprimé en fonction d'une seule de ces variables.

Désignons enfin par w l'angle que la normale PO ou PA de

la cycloïdale a décrit depuis l'origine du mouvement: on a alors

$$dw - dv = d\alpha,$$

car le changement subi par α est égal à la vitesse angulaire de AC′ autour de C′. Or, de cette équation il résulte

$$w - (v - v_0) = \alpha - \alpha_0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

en supposant que les angles w soient comptés à partir du moment où le mouvement commence.

Lorsque α par l'intégration de (2) et (6) et v par l'intégration de (10) ont été exprimés en fonction de u, l'équation (11) pourra servir à trouver u, et par suite aussi ϱ, en fonction de w; ce qui déterminerait l'équation essentielle proprement dite de la cycloïdale. Dans la plupart des cas, toutefois, on sera arrêté par des difficultés insurmontables. Le ϱ des courbes cycloïdales ne peut généralement être exprimé qu'en fonction de u ou de v, et, dans quelques cas particuliers seulement, aussi en fonction de w.

Il peut quelquefois être utile de faire usage des équations

$$d\sigma = \frac{(R - R')\,r}{R\,R'}\,ds, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$dw = \frac{(R - R')\,r + R\,R'\cos\alpha}{R\,R'\,r}\,ds; \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

où $d\sigma$ représente l'élément d'arc de la cycloïdale, et où ds peut être remplacé par $R\,du$ ou $R'\,dv$. La première de ces équations s'obtient en remarquant que les éléments d'arc $d\sigma$ et ds sont proportionnels aux vitesses PM et AB, et qu'on a trouvé pour ce rapport (page 6)

$$\frac{(R - R')\,r}{R\,R'}.$$

La seconde équation se trouve à l'aide de la relation

$$\varrho = \frac{d\sigma}{dw},$$

d'où l'on tire

$$dw = \frac{d\sigma}{\varrho}.$$

A l'égard de l'état positif ou négatif des variables introduites, voici ce qu'il y a à observer.

Des trois côtés qui forment le triangle APC, le côté $AC = R$ d'abord peut changer de signe en passant par *zéro* ou par l'*infini*. Mais r et r_{-1} peuvent également changer de signe, et cela à travers ∞ si les courbes K et K_{-1} ont des asymptotes et tendent par une de leurs branches vers le côté positif et par une autre vers le côté négatif de ces asymptotes, et à travers 0 si les points A et C dépassent le point P. Pour que les formules trigonométriques (8) et (9) puissent s'appliquer à tous les cas possibles, nous conviendrons que α et α_{-1} sont les angles formés par les directions *positives* des normales AC et CC_{-1} avec les directions *positives* des droites AP et CP; et que ces angles eux-mêmes sont *positifs* lorsque, aux sommets, on doit tourner *à droite* pour passer de la normale à l'autre côté de l'angle.

---

3. Examen des cycloïdales décrites simultanément par les divers points du plan de la courbe génératrice, quand celle-ci touche la courbe directrice en un point donné. Cercle des points d'inflexion. Focale.

Nous supposons que R et R' diffèrent tous les deux de *zéro* et que R est positif. Dans toutes les cycloïdales dont les points générateurs se trouvent, pour une certaine position de la courbe génératrice, sur la tangente commune des deux courbes, on a $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$, donc $\cos\alpha = 0$ et $\varrho = r$; tandis que, pour $\cos\alpha \lessgtr 0$, on aura aussi $\varrho \gtrless r$ lorsque $0 < R < R'$, mais $\varrho \lessgtr r$ lorsque $R > R'$ ou $R < 0$. Géométriquement, cela signifie que les centres

de courbure de toutes les cycloïdales décrites par les différents points d'une tangente à la courbe génératrice coïncident simultanément avec le point de contact de cette tangente au moment où le point A tombe sur la courbe directrice, tandis qu'à ce même instant, pour chaque point générateur P situé au *côté intérieur* de la tangente (c'est-à-dire du côté de la courbe), le centre de courbure se trouve au même côté de A que P, lorsque la courbe est *hypocycloïdale-extérieure* ($R > R'$) ou *épicycloïdale* ($R < 0$); à l'autre côté, lorsqu'elle est *hypocycloïdale-intérieure* ($0 < R < R'$). Pour chaque point générateur situé au *côté extérieur* de la tangente, c'est tout l'opposé.

Si le point de contact lui-même est considéré comme point générateur, on a pour ce point $r = 0$ et par conséquent aussi $\varrho = 0$. La cycloïdale forme en ce cas un point de rebroussement, car les équations (12) et (13) montrent que $d\varrho$, mais non dw, change de signe en même temps que r. Il faut remarquer que $\cos\alpha$ change également de signe avec r; l'angle PAC, à la vérité, est aigu immédiatement avant et après l'instant que nous considérons, mais la direction du côté AC ne change *pas* de signe, celle du côté PA *change*; par conséquent, l'angle α doit devenir obtus s'il était aigu, et réciproquement.

Le point de contact A des deux courbes est le seul point, dans le plan de la courbe génératrice, qui forme à ce moment un point de rebroussement.

Si la tangente commune des deux courbes est le lieu géométrique de tous les points où le centre de courbure des cycloïdales est situé au point de contact, il y a aussi un lieu géométrique de points où le rayon de courbure est infini, et un lieu géométrique de points où ce rayon atteint un maximum ou un minimum. Le rayon de courbure devient infini lorsqu'on a

$$(R - R')\,r + R\,R'\cos\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Et alors il se produit toujours un point d'inflexion, à moins qu'on n'ait $r = 0$ et $\cos\alpha = 0$, cas dont nous avons déjà parlé; ou à moins que, pendant que r et α passent par les valeurs qui

satisfont à l'équation (14), la forme $(R - R')r + RR' \cos\alpha$ ne change pas de signe. Dans ce cas, en effet, ϱ ne change pas non plus de signe, et il ne peut pas être question d'un point d'inflexion; $\varrho = \infty$ est alors un maximum. En général, toutefois, ϱ changera de signe en passant par ∞; et alors, d'après les équations (12) et (13), dw, mais non $d\sigma$, changera de signe en passant par *zéro*, ce qui marque l'existence d'un point d'inflexion.

L'équation (14) est l'équation polaire d'un cercle, lorsque le pôle se trouve sur la circonférence; le diamètre de ce cercle est égal à $\frac{RR'}{R - R'}$. Construisons donc (fig. 2) $AV = \frac{RR'}{R - R'}$, c'est-à-dire une quatrième proportionnelle à CC', C'H et CA, et sur cette ligne, comme diamètre, décrivons un cercle; toutes les cycloïdales dont les points générateurs se trouvent sur la circonférence de ce cercle y auront alors un point d'inflexion, sauf au point A, où l'on a $r = 0$ et $\cos\alpha = 0$, et où il naît un point de rebroussement; et au point où $\varrho = \infty$ est un maximum. Ce second point ne peut être ailleurs qu'en V. Si l'on se figure, en effet, ce même cercle construit lorsque la courbe génératrice se trouve dans les positions immédiatement précédente et suivante, tous les points générateurs pour lesquels $(R - R)r + RR' \cos\alpha$ change de signe seront situés, dans la position précédente, à l'extérieur du cercle AV, et dans la position suivante à l'intérieur de ce cercle, où réciproquement; parce que pour chaque point en dehors de ce cercle on a $(R - R)r + RR' \cos\alpha > 0$, et pour chaque point en dedans $(R - R')r + RR \cos\alpha < 0$. Si donc $(R - R')r + RR \cos\alpha$ ne change pas de signe, le point générateur reste *en dehors* du cercle AV, de sorte que la cycloïdale *touche* le cercle; or, cela ne peut avoir lieu qu'en V.

Dans la figure, le cercle AV est situé au côté négatif de la normale AC, parce qu'on a $R > R$, et par conséquent $\frac{RR'}{R - R'}$ positif; des angles α aigus donnent donc des valeurs négatives pour r, des angles obtus donnent des valeurs positives. Dans

le cas de $0 < R < R'$, le cercle est situé à l'autre côté de la tangente commune. Pour $R < 0$, toutefois, le cercle se place de nouveau au même côté que dans la figure. C'est ce qu'on peut aussi exprimer de la manière suivante : dans l'état *hypocycloïdal-extérieur* ($R > R'$), tous les points d'inflexion se trouvent, par rapport à la courbe génératrice, à l'autre côté de la tangente commune ; dans l'état *hypocycloïdal-intérieur* ($0 < R < R'$) et dans l'état *épicycloïdal*, ils se trouvent au même côté.

Dans un travail de La Hire sur les courbes cycloïdales, travail inséré aux *Mémoires de l'Académie des sciences* (1706) et cité par M. Cramer, le cercle dont il vient d'être question, et que nous appellerons *cercle des points d'inflexion*, est trouvé par une méthode purement géométrique et forme le point de départ d'une foule de constructions. De La Hire ne parle pas, toutefois, du lieu géométrique de tous les points qui, pour une position donnée de la courbe génératrice, forment un *sommet*. Ce lieu est une courbe dont l'équation, en coordonnées rectilignes, est du troisième degré. Voici comment on l'obtient.

En différentiant l'équation (1) par rapport à u, on trouve, après réduction,

$$\frac{\delta\varrho}{du} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(R-R')\{(R-R'r+2RR'\cos\alpha\}\, r\dfrac{dr}{du} + r^2\cos\alpha\left(R'^2\dfrac{dR}{du} - R^2\dfrac{dR'}{du}\right) + \\ \qquad + RR'(R-R')\, r^2 \sin\alpha\dfrac{d\alpha}{du}\end{array}\right\}}{\{(R-R')r + RR'\cos\alpha\}^2}.$$

Substituons dans celle-ci les valeurs

$$\frac{dr}{du} = R\sin\alpha \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{du} = \frac{R\cos\alpha - r}{r},$$

qui résultent de (2) et de (6) ; remarquons, en outre, que $\frac{dR}{du} = R_{-1}$, tandis que le rayon de courbure $C'C'_{-1} = R'_{-1}$ de la développée de K' (fig. 2) est égal à $\frac{dR'}{dv}$, de sorte qu'on a

$$\frac{dR'}{du} = \frac{dR'}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = R'_{-1} \frac{R}{R'},$$

à cause de $Rdu = R'dv$; on obtient alors finalement, après les réductions convenables

$$\frac{\delta\varrho}{du} = \frac{r}{R'} \cdot \frac{\left\{ \begin{array}{c} (R'^3 R_{-1} - R^3 R'_{-1}) r \cos\alpha + R R' (R - R') (R - 2R') r \sin\alpha + \\ + 3 R^2 R'^2 (R - R') \sin\alpha . \cos\alpha \end{array} \right\}}{\{(R - R) r + R R' \cos\alpha\}^2}.$$

En général, — c'est-à-dire abstraction faite du cas particulier où $r = 0$, et de celui où le dénominateur devient *zéro*, cas dont il a déjà été parlé, — ce coefficient différentiel s'évanouira pour

$$\begin{aligned} (R'^3 R_{-1} - R^3 R'_{-1}) r \cos\alpha + R R' (R - R') (R - 2R') r \sin\alpha + \\ + 3 R^2 R'^2 (R - R') \sin\alpha . \cos\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15) \end{aligned}$$

C'est là l'équation polaire de la courbe sur laquelle sont situés tous les points qui forment simultanément un sommet.

En divisant par le troisième terme, et en faisant, pour abréger,

$$\frac{3 R^2 R'^2 (R - R')}{R'^3 R_{-1} - R^3 R'_{-1}} = -X \text{ et } \frac{3 R R'}{R - 2R'} = -Y, \quad . \quad . \quad (16)$$

il vient

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{1}{Y} \frac{r}{\cos\alpha} = 1;$$

ou, si l'on pose $r \sin\alpha = y$ et $r \cos\alpha = x$,

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{r^2}{y} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{r^2}{x} = 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

d'où il ressort, en premier lieu, que l'équation en coordonnées rectilignes est du troisième degré, attendu qu'on a $r^2 = x^2 + y^2$.

Figurons-nous maintenant, pour chaque point du lieu géométrique, une troisième proportionnelle ξ à y et r, et une troisième proportionelle η à x et r; ξ et η sont alors les coordonnées ordinaires d'une ligne droite

$$\frac{\xi}{Y} + \frac{\eta}{Y} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

qui détermine sur les lignes AC et AS (fig. 2), lesquelles sont

respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, des segments égaux à X et à Y.

Sans nous embarrasser ici de l'exécution de cette construction, nous nous contenterons de remarquer que les segments X et Y peuvent être obtenus géométriquement, quand on connaît, pour le point où la courbe directrice et la courbe génératrice se touchent, leurs rayons de courbure et ceux de leurs développées. En portant ces segments $X = \mathrm{A}a$ et $Y = \mathrm{A}b$ sur AC et AS, d'un côté de A ou de l'autre, suivant que X et Y sont positifs ou négatifs, on pourra tracer la droite (18). Si l'on joint alors le point A à un point quelconque q de cette droite, et qu'on mène qn perpendiculaire à AS et nm perpendiculaire à Aq, on a d'abord

$$mn = \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}};$$

mais

$$\xi = \frac{r^2}{y} \text{ et } \eta = \frac{r^2}{x};$$

donc, après substitution,

$$mn = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r,$$

ce qui est le rayon vecteur d'un point de la courbe. Comme on a, en outre, $r^2 = \xi y = \eta x$ ou $\frac{\xi}{\eta} = \frac{x}{y}$, ce point se trouve sur la droite Aq ou sur son prolongement, selon que ξ et η ont des signes égaux ou opposés. Dans la figure, pour le point q, l'*abscisse* ξ est négative et l'*ordonnée* η positive; par conséquent, pour le point p de la courbe, l'*ordonnée* y doit être négative et l'*abscisse* x positive.

De cette manière a été construite la courbe WAW′ dans la figure 2. C'est la *focale* de Quetelet, et elle a été obtenue par M. K. D. Schönfeld, dans sa Dissertation „*Over de omgekeerde kegelsneden*" (1866), par l'inversion d'une hyperbole équilatère, c'est-à-dire, en menant, d'un point quelconque du contour d'une pareille section conique, des rayons vecteurs, sur lesquels on

prend, à partir du point, des segments inversement proportionnels aux rayons vecteurs. Pour avoir l'équation polaire de la focale, on n'a donc qu'à substituer dans l'équation polaire d'une hyperbole équilatère, le pôle étant situé quelque part sur la circonférence, $\frac{a^2}{r}$ au rayon vecteur; a est la constante d'inversion. M. Schönfeld trouve ainsi pour l'équation de la focale en coordonnées rectilignes

$$a^2 (x^2 - y^2) + 2 (Cx + Dy)(x^2 + y^2) = 0;$$

et c'est aussi la forme que prend notre équation (17), lorsqu'on y fait tourner les axes de 45°. En remplaçant dans cette équation x par $\frac{1}{2}\sqrt{2}(x-y)$ et y par $\frac{1}{2}\sqrt{2}(x+y)$, on obtient, en effet,

$$-XY(x^2 - y^2) + \sqrt{2}\,\{(X+Y)x + (X-Y)y\}(x^2 + y^2) = 0.$$

En prenant maintenant $a^2 = -XY$, on a

$$C = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \text{ et } D = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}.$$

L'équation de l'hyperbole dont l'inversion donne naissance à notre focale devient alors, en coordonnées parallèles aux axes principaux,

$$x^2 - y^2 + \sqrt{2}(X+Y)x + \sqrt{2}(X-Y)y = 0.$$

Nous ne nous étendrons pas sur les propriétés de la focale. Disons seulement que les deux branches se rapprochent d'une même droite asymptotique, qui est parallèle à la droite représentée par l'équation (18); nous appelons aussi l'attention sur la construction par laquelle nous avons obtenu la focale, construction qui n'est pas mentionnée dans le travail de M. Schönfeld.

Dans des circonstances particulières, la focale prend des formes spéciales.

Lorsque, en premier lieu, on a $R'^3 R_{-1} - R^3 R'_{-1} = 0$, le premier membre de l'équation (15) se laisse partager en deux facteurs, à savoir

$$\sin\alpha\,\{(R - 2R')r + 3RR\cos\alpha\} = 0.$$

La focale alors est remplacée par la droite $\sin\alpha = 0$, c'est-à-dire par la droite A C, et par le cercle

$$r = \frac{3\,R\,R'}{R - 2\,R'} \cos\alpha,$$

dont le diamètre a une longueur $= \frac{3\,R\,R'}{R - 2\,R'}$ et est situé sur A C. Ce cercle se trouve à gauche ou à droite de S T, suivant que $\frac{3\,R\,R'}{R - 2\,R'} \lessgtr 0$. Ce cas se présente, entre autres, dans les hypocycloïdes et les épicycloïdes.

En second lieu, si l'on a $R = 2\,R'$, l'équation devient

$$\cos\alpha\,\{(R_{-1} - 8\,R'_{-1})\,r + 3\,R^2 \sin\alpha\} = 0,$$

ce qui représente la droite S T et un cercle

$$r = -\frac{3\,R^2}{R_{-1} - 8\,R'_{-1}} \sin\alpha,$$

dont le diamètre, égal à $\frac{3\,R^2}{R_{-1} - 8\,R'_{-1}}$, tombe sur S T, au-dessus ou au-dessous de A, selon que cette valeur est $\lessgtr 0$.

Enfin, si $R = R'$, il ne reste plus que le premier terme de l'équation (15), et la focale est réduite à la tangente S T.

Outre le point A, le cercle des points d'inflexion et la focale auront encore toujours *un* point commun *s*. En éliminant r entre les équations polaires de ces deux lignes, on trouve, en effet,

$$\mathrm{T}g\,\alpha = \frac{R'^3 R_{-1} - R^3\,R'_{-1}}{R\,R'(R - R')(2\,R - R')} = \frac{Y\,(R - R')}{X\,(2\,R - R')}.$$

Or, il est vrai que cette équation donne deux valeurs pour α, mais il n'y en a qu'une seule qui puisse satisfaire à l'équation du cercle. Le point en question continuera à être un point d'inflexion, attendu que ϱ ne cesse pas de changer de signe en passant par ∞, tandis que $\frac{d\varrho}{du}$ devient $= \frac{0}{0}$, de sorte que le caractère d'un maximum où d'un minimum n'existe pas.

---

4. Examen des cycloïdales décrites par les divers points d'une droite liée à la courbe génératrice.

Nous supposons une ligne droite qui coupe la courbe génératrice et qui soit invariablement liée avec elle, et nous suivons les divers points de cette sécante dans le mouvement qu'ils exécutent pendant que la courbe génératrice roule sur la directrice.

Nous pouvons toutefois nous représenter ce mouvement d'une autre manière. Nous pouvons nous figurer qu'en chaque point de la courbe génératrice on ait construit le cercle des points d'inflexion et la focale, qui forment alors comme une couronne autour de la courbe génératrice. Cette couronne sera traversée par la sécante. Celle-ci rencontre une partie des cercles de points d'inflexion, et chacune de ces intersections est un point de la sécante, qui constitue un point d'inflexion lorsque la courbe génératrice touche la directrice au point correspondant. De cette manière, on trouve d'un seul coup tous les points de la sécante qui forment des points d'inflexion. A de rares exceptions près, toutes les focales sont coupées par la sécante; et, d'un autre côté, il n'y aura aucun point de la sécante qui ne se trouve pas sur une des focales. On voit par là que les points de la sécante ne deviennent *pas tous* des points d'inflexion, mais que *tous* doivent, tôt ou tard, former des sommets.

Supposons maintenant que la position des deux courbes R et R', à un moment donné, soit telle que la représente la figure 1; le mouvement se continuant au-delà, on aura encore pendant quelque temps $R > R'$, c'est-à-dire que la courbe restera *hypocycloïdale extérieure*; et durant ce même temps aussi, le cercle des points d'inflexion se maintiendra au côté extérieur de la tangente. Si l'on imagine toutefois que la différence entre R et R' devienne de plus en plus petite et finalement nulle, le cercle des points d'inflexion se dilatera successivement et finira par se transformer dans la tangente. Le *nœud* de la focale, au contraire, se resserrera de plus en plus, jusqu'à ce que cette courbe, de

même que son asymptote, se confonde aussi avec la tangente, au moment où R sera devenu égal à R'. A ce moment, les centres de courbure de toutes les cycloïdales franchissent ensemble la tangente, et les rayons de courbure changent de signe, au moins si R continue à décroître plus vite que R'; toutes les cycloïdales forment un point de rebroussement, puisque $d\sigma$, mais non dw, change de signe. Un seul point de la sécante fait toutefois exception, à savoir, le point où elle coupe la tangente aux deux courbes. Pour ce point on a $\cos\alpha = 0$, et par conséquent $\varrho = \frac{0}{0}$. Essayons de déterminer ce point plus exactement.

En divisant par $R - R'$ le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur de ϱ, on obtient

$$\varrho = \frac{r}{r + \frac{R R' \cos\alpha}{R - R'}},$$

et il est évident qu'il suffit de chercher la valeur de la fraction $\frac{\cos\alpha}{R - R'}$ pour $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$ et $R = R'$, attendu que, par hypothèse, R, R' ni r ne sont nuls. Si l'on différentie le numérateur et le dénominateur de cette fraction, en regardant u comme variable indépendante, on trouve

$$\frac{\sin\alpha \frac{d\alpha}{du}}{\frac{dR'}{du} - \frac{dR}{du}}$$

Mais $\frac{d\alpha}{du} = \frac{R\cos\alpha - r}{r}$, $\frac{dR'}{du} = R'_{-1} \cdot \frac{R'}{R}$ et $\frac{dR}{du} = R_{-1}$;

cette fraction se change donc en celle-ci

$$\frac{R'(R\cos\alpha - r)\sin\alpha}{R R'_{-1} r - R' R_{-1} r};$$

qui devient pour $R = R'$ et $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$

$$\mp \frac{1}{R'_{-1} - R_{-1}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule de ϱ, on a, en remplaçant RR' par R'^2,

$$\frac{r^2 (R'_{-1} - R_{-1})}{r (R'_{-1} - R_{-1}) \mp R'^2}.$$

Il résulte de là que, au point en question, le rayon de courbure aura en général une valeur finie et ne changera pas de signe. Les équations (12) et (13) montrent, en outre, que $d\varrho$ et dw changent tous les deux de signe en passant par zéro, ce qui signifie qu'il se forme une *ramphoïde* (rebroussement de la seconde espèce).

Maintenant, les cycloïdales deviennent *hypocycloïdales-intérieures*. Le cercle des points d'inflexion et le nœud de la focale sont situés tous les deux au-dessous de la tangente, mais le second s'est placé à l'autre côté de la normale.

Lorsque R devient égal à zéro, et ensuite négatif, l'état *épicycloïdal* se produit. Le passage est reconnaissable à ce que pour toutes les cycloïdales ϱ devient $= r$, et que, par conséquent, tous les centres de courbure tombent au point de contact. Au moment où l'on avait $R = R'$, tous les centres de courbure ont franchi la sécante; mais quelques-uns se seront mus vers A, d'autres se seront éloignés de ce point. Pour que ces derniers arrivent aussi en A quand $R = 0$, ils doivent passer par l'infini et se rapprocher ainsi de A de l'autre côté. Les cycloïdales auxquelles appartiennent ces centres de courbure doivent donc toutes acquérir un point d'inflexion dans la période où R décroît de R' à 0; les autres, au contraire, ne peuvent pas avoir d'inflexion dans cette période.

Il faut maintenant faire une distinction, suivant que le point de la courbe génératrice, où R change de signe en passant par *zéro*, est un point de rebroussement ou un point d'inflexion. Dans le premier cas, ds change de signe, et par conséquent $d\sigma$ et dw n'en changent pas. Dans le second cas, ds ne change pas de signe, et par conséquent $d\sigma$ et dw en changent tous les deux. Les cycloïdales n'ont donc pas de point singulier dans le premier cas, et ont une *ramphoïde* dans le second.

Lors du passage de l'état hypocycloïdal à l'état épicycloïdal, le cercle des points d'inflexion et le nœud de la focale viennent tous les deux se placer au-dessus de la tangente.

Pendant que R croît jusqu'à ∞, il ne se passe rien de particulier, sauf que beaucoup de cycloïdales forment leur sommet et quelques-unes leur point d'inflexion. Les centres de courbure ne franchissent pas la sécante, excepté quand le point générateur est situé sur la courbe génératrice et que celle-ci touche en ce point la courbe directrice, circonstances qui donnent lieu à un point de rebroussement. Pour toutes les autres cycloïdales, le centre de courbure reste au même côté du point générateur, tandis qu'à chaque instant l'intersection de la sécante et de la tangente commune appartient à une cycloïdale dont le centre de courbure dépasse le point A.

Nous laissons maintenant R changer de signe à travers l'infini, et redevenir par conséquent positif. L'équation du cercle des points d'inflexion devient pour $R = \infty$

$$r + R' \cos \alpha = 0.$$

Ce cercle a donc pour diamètre le rayon de courbure de la directrice et est situé au-dessus de la tangente.

Le rayon de courbure de la cycloidale devient

$$\varrho = \frac{r}{r + R' \cos \alpha},$$

tandis que $d\sigma$ et dw changent ou ne changent pas de signe, suivant que ds change de signe. Par conséquent, si le point de la courbe génératrice, où R change de signe à travers ∞, est un point d'inflexion, le point correspondant de la cycloïdale est un *point ordinaire*; si le premier point est un point de rebroussement, la cycloïdale a une *ramphoïde.*

La cycloïdale est maintenant redevenue hypocycloïdale-extérieure, et nous avons examiné les changements les plus importants que peut subir R, dans la supposition tacite, il est vrai, que R' reste toujours fini et positif. Si R' change de signe en passant par zéro ou par ∞, il en résulte une ramphoïde dans la cycloïdale, lorsque $R' = 0$ est un point d'inflexion, ou $R' = \infty$

ARNOLD ARBOREETUM

un point de rebroussement; tandis qu'il se produit un point ordinaire, quand $R' = 0$ est un point de rebroussement, ou $R' = \infty$ un point d'inflexion.

---

5. Anti-cycloïdales. Cycloïdales semblables, produites par deux courbes génératrices qui roulent sur la même directrice.

Lorsque deux courbes génératrices congruentes roulent ensemble sur la même directrice et à chaque instant touchent celle-ci en des points homologues, tandis que les rayons de courbure ont toujours des signes opposés, deux points homologues par rapport aux deux courbes génératrices décrivent des lignes anti-cycloïdales. Si, pour chaque position, on veut pouvoir comparer entre eux les rayons de courbure, il faut remarquer qu'aux différentes valeurs R, u et α de l'une des cycloïdales, correspondent les valeurs $-R$, $-u$, $\pi - \alpha$ dans l'anti-cycloïdale; de sorte que celle-ci est engendrée par le mouvement de la courbe

$$-R = f(-u),$$

lorsque

$$R = f(u)$$

représente la courbe génératrice de la première cycloïdale; quant au point générateur de l'anti-cycloïdale, il est déterminé par la condition que, pour $u = 0$, on a $r = r_0$ et $\alpha = \pi - \alpha_0$, lorsque dans la cycloïdale, pour $u = 0$, on a $r = r_0$ et $\alpha = \alpha_0$.

Si l'on se figure deux courbes génératrices *différentes*, roulant sur une même directrice, on peut se demander, par exemple, à quelle condition ces deux génératrices doivent satisfaire pour produire des cycloïdales semblables. Cette question est liée au problème qui consiste à déterminer la courbe génératrice quand la directrice et la cycloïdale sont données. Car, en supposant que la cycloïdale, engendrée par l'une des deux courbes en question, ait pour équation essentielle

$$\varrho = \varphi(w),$$

le rayon de courbure d'une cycloïdale semblable à celle-ci sera, pour les mêmes valeurs de w, k fois plus grand; elle aura donc pour équation

$$\varrho = k\,\varphi\,(w),$$

et il ne s'agit plus que de savoir quelle courbe génératrice, roulant sur la directrice

$$R' = F\,(v),$$

engendrera cette seconde cycloïdale.

La solution revient à ceci. De l'équation (11) il suit

$$w = v - v_0 + \alpha - \alpha_0\,;$$

de sorte qu'on a

$$\varrho = k\,\varphi\,(v - v_0 + \alpha - \alpha_0).$$

Mais on a aussi

$$\varrho = \frac{(R - R')\,r^2}{(R - R')\,r + R\,R'\cos\alpha},$$

donc

$$\frac{(R - R')\,r^2}{(R - R')\,r + R\,R'\cos\alpha} = k\,\varphi\,(v - v_0 + \alpha - a_0).$$

En résolvant cette équation par rapport à R, après avoir substitué $R' = F\,(v)$, on a R en fonction de v, r et α, soit, par exemple,

$$R = \psi\,(v,\ r,\ \alpha).$$

Mais on doit aussi avoir

$$R\,d\,u = R'\,d\,v = F\,(v)\,d\,v,$$

d'où il résulte

$$d\,v = \frac{\psi\,(v, r, \alpha)}{F\,(v)}\,d\,u\,;$$

en y joignant

$$d\,r = \psi\,(v, r, \alpha)\sin\alpha\,d\,u$$

et

$$d\,\alpha = \frac{\psi\,(v, r, \alpha)\cos\alpha - r}{r}\,d\,u,$$

on a trois équations différentielles simultanées, d'où l'on peut tirer v, r et α. En substituant les valeurs ainsi trouvées dans l'équation

$$R = \psi(v, r, \alpha),$$

on obtient l'équation de la courbe génératrice en question.

---

6. La ligne génératrice ou la ligne directrice est un cercle ou une droite.

a. *La ligne génératrice est un cercle*, de sorte qu'on a $R = a$ et $R_{-1} = 0$. Les équations (3) et (7) donnent immédiatement

$$d r_{-1} = 0, \qquad \text{ou } r_{-1} = \text{constante} = p;$$
$$d \alpha_{-1} = - d u, \qquad \text{ou } \alpha_{-1} - (\alpha_{-1})_0 = - u.$$

Du triangle APC, on tire

$$r = \sqrt{a^2 + p^2 - 2 a p \sin((\alpha_{-1})_0 - u)},$$

$$\cos \alpha = \frac{a - p \sin((\alpha_{-1})_0 - u)}{\sqrt{a^2 + p^2 - 2 a p \sin((\alpha_{-1})_0 - u)}}.$$

En substituant ces valeurs dans

$$\varrho = \frac{(a - R') r^2}{(a - R') r + a R' \cos \alpha},$$

on obtient, après réduction

$$\varrho = \frac{(a - R') \sqrt{a^2 + p^2 - 2 a p \sin((\alpha_{-1})_0 - u)}^3}{a^3 + (a - R) p^2 - a p (2 a - R') \sin((\alpha_{-1})_0 - u))}.$$

Soit a positif. Si l'on prend alors $(\alpha_{-1})_0 = \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire, si l'on fait commencer le mouvement lorsque le point générateur se trouve sur la droite CA et, de plus, au même côté de C que A, on aura $\sin((\alpha_{-1})_0 - u) = \cos u$. Pour l'anti-cycloïdale, a est alors négatif et $(\alpha_{-1})_0 = -\frac{1}{2}\pi$, par suite $\sin((\alpha_{-1})_0 - u) = -\cos u$. Nous avons donc en général

$$\varrho = \frac{(a - R') \sqrt{a^2 + p^2 \mp 2 a p \cos u}^3}{a^3 + (a - R') p^2 \mp a p (2 a - R) \cos u}, \quad \ldots (19)$$

où le signe supérieur doit être employé avec les valeurs positives de a, le signe inférieur avec les valeurs négatives.

Pour $p = 0$, on a $\varrho = a - R'$. Par conséquent, lorsqu'un cercle roule sur une ligne directrice quelconque, le rayon de courbure de la cycloïdale décrite par le centre de ce cercle est toujours égal à la différence ou à la somme du rayon du cercle générateur et du rayon de courbure de la directrice, suivant que le contact est intérieur ou extérieur.

b. *La ligne génératrice est une droite.* Pour $R = \infty$, l'équation de la cycloïdale devient

$$\varrho = \frac{r^2}{r + R \cos \alpha}.$$

En nommant q la distance du point générateur à la droite génératrice, on a toujours

$$q = r \cos \alpha;$$

de sorte que q est positif lorsque P tombe au côté positif de la droite génératrice; négatif, lorsque P tombe à l'autre côté. La substitution de cette valeur de q donne

$$\varrho = \frac{r^3}{r^2 + R' q}.$$

En outre, $\int_{v_0}^{v} R' dv$ est égale à la partie de la droite qui a déjà roulé sur la directrice et que nous appellerons l. En faisant maintenant commencer le mouvement au pied de la perpendiculaire q, on a $r^2 = l^2 + q^2$, et l'équation peut être écrite ainsi

$$\varrho = \frac{\sqrt{l^2 + q^2}^3}{l^2 + q^2 + R'q};$$

tandis que l'égalité

$$\int_{v_0}^{v} R' dv = l$$

et la relation

$$w - (v - v_0) = \alpha - \alpha_0$$

permettent d'exprimer ϱ en fonction de w, lorsque cela est possible. α_0 est 0 quand q est positif, mais $= \pi$ quand q est négatif.

Le diamètre du cercle des points d'inflexion est ici toujours égal au rayon de courbure de la ligne directrice, mais il est situé à l'autre côté de la tangente. A l'égard de la focale, l'examen nous apprend qu'on a

$$X = \frac{3\,R'^2}{R'_{-1}} \text{ et } Y = -3\,R'.$$

c. *La ligne directrice est un cercle.* $R' = b$, donc $R'_{-1} = 0$,

$$\varrho = \frac{(R - b)\,r^2}{(R - b)\,r + R\,b \cos\alpha}.$$

Ce cas ne donne lieu à aucune remarque particulière.

d. *La ligne directrice est une droite.*

$$\varrho = \frac{r^2}{r - R \cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Le diamètre du cercle des points d'inflexion est égal, en grandeur et en direction, au rayon de courbure de la courbe génératrice. Pour la focale, on a

$$X = \frac{3\,R^2}{R_{-1}} \text{ et } Y = \tfrac{3}{2}\,R.$$

---

7. Hypocycloïdes et Epicycloïdes.

Les équations des lignes cycloïdiques sont comprises dans la formule

$$\varrho = \frac{(a - b)\sqrt{a^2 + p^2 \pm 2\,a\,p \cos u}^{\,3}}{a^3 + (a - b)\,p^2 \mp a\,p\,(2\,a - b) \cos u},$$

qu'on obtient en faisant $R' = b$ dans l'équation (19). Cette formule suppose que le mouvement commence lorsque le point générateur se trouve sur la droite CA, ou sur son prolonge-

ment, et en outre du même côté de C que A; le signe supérieur se rapporte aux valeurs positives de a, par conséquent aux hypocycloïdes, le signe inférieur aux valeurs négatives de a, par conséquent aux épicycloïdes. Les lignes cycloïdiques sont *allongées*, *ordinaires* ou *raccourcies*, suivant qu'on a $p \lesseqgtr a$; les hypocycloïdes sont *extérieures* ou *intérieures* selon qu'on a $a \gtreqless b$.

La discussion des différentes formes peut être notablement abrégée à l'aide de la proposition suivante.

Lorsque sur un même cercle directeur roulent deux cercles générateurs dont les rayons ont une somme algébrique égale au rayon du cercle directeur, deux points, choisis de telle sorte que le produit de leurs distances aux centres des cercles générateurs soit égal au produit des rayons de cercles, décrivent des cycloïdales semblables.

Soient, par exemple, a_1 et a_2 les rayons des cercles générateurs; b le rayon du cercle directeur, p_1 et p_2 les distances de deux points P_1 et P_2 aux centres C_1 et C_2 des cercles générateurs; la courbe que décrit le point P_1, lorsqu'il se meut avec le cercle C_1, sera alors semblable à la courbe que décrit P_2, lorsque ce point est entraîné avec le cercle C_2; pourvu qu'il soit satisfait aux conditions

$$a_1 + a_2 = b \text{ et } p_1 p_2 = \pm a_1 a_2,$$

où on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que a_1 et a_2 ont des signes égaux ou contraires.

Nous démontrerons cette proposition séparément pour chacun des deux cas $a_1 > b$ et $a_1 < b$; pour le premier, la démonstration sera géométrique, pour le second, analytique.

Dans la fig. 3, C' est le centre du cercle directeur, C_1, C_2, P_1 et P_2 sont les positions que les centres des cercles générateurs occupent au moment où le mouvement commence et où les trois cercles se touchent en A_0. Comme $C_1 A_0$ ou a_1 est plus grand que $C' A_0 = b$, a_2 est négatif, et par conséquent $C_2 A_0 = C_1 C'$ se porte à l'autre côté de A_0. Figurons-nous

maintenant que les deux cercles se meuvent simultanément, jusqu'à ce que le premier ait décrit un angle $A_0 C_1 \alpha_1 = u$, et le second un angle égal $A_0 C_2 \alpha_2 = -u$; les centres des cercles générateurs seront alors parvenus en C'_1 et C'_2, les deux points générateurs en P'_1 et P'_2; tandis que A_1 et A_2 sont les points où le cercle directeur est touché par les deux cercles roulants. En faisant l'angle $A_0 C' A_1 = v_1$ et l'angle $A_0 C' A_2 = v_2$, on a

$$b v_1 = a_1 u \text{ et } b v_2 = a_2 u,$$

et par conséquent

$$v_1 - v_2 = \frac{a_1 + a_2}{b} u = u,$$

attendu que, par supposition, $a_1 + a_2 = b$. Dans la figure, on a donc: angle $A_1 C' A_2 = u$. Mais lorsque la droite $C_1 P_1$ a pris la position $C'_1 P'_1$, la droite $a_1 C_1$ s'est placée en $A_1 C'_1$; on a donc aussi: angle $P'_1 C'_1 A_1 = P_1 C_1 \alpha_1 = u$, et par conséquent $C'_1 P'_1 \parallel C' A_2$. De même, on a: angle $P'_2 C'_2 A_2 = P_2 C_2 \alpha_2 = u$, et par suite $C'_2 P'_2 \parallel C' A_1$. L'intersection A'_0 de $C'_1 P'_1$ et $C'_2 P'_2$ se trouve donc à des distances de C'_1 et C'_2 qui sont égales à $C_1 A_0$ et $C_2 A_0$. Par chacun des deux cercles le point A_0 est donc amené en A'_0; d'où suit la propriété connue, que les deux cercles générateurs produisent la même cycloïdique *ordinaire*.

Si maintenant P_1 et P_2 sont choisis de façon qu'on ait $P_1 C_1 \times P_2 C_2 = P'_1 C'_1 \times P'_2 C'_2 = C_1 A_0 \times C_2 A_0 = C' C_2 \times C' C_1 = C' C'_2 \times C' C'_1$, il en résulte la proportion

$$\frac{P'_1 C'_1}{C' C'_1} = \frac{C' C'_2}{P'_2 C'_2}.$$

En joignant donc P'_1 et P'_2 avec C', les triangles $P'_1 C' C'_2$ et $P'_2 C' C'_2$ sont semblables, car ils ont, en outre, angle $P'_1 C'_1 C' =$ angle $P'_2 C'_2 C'$. Par conséquent, P'_1, P'_2 et C' sont situés en ligne droite. Et comme alors le rapport

$$\frac{C' P'_1}{C' P'_2} = \frac{C'_1 C'}{P'_2 C'_2} = \frac{C_1 C'}{P_2 C_2}$$

reste constant, quelle que soit la position que les points P_1 et P_2 viennent occuper par suite de la révolution des cercles, on voit que les cycloïdales décrites par ces cercles sont semblables, et que C′ est leur centre de similitude extérieur.

Lorsqu'on a $a_1 < b$, a_2 prend une valeur positive. Chacun des deux cercles donne donc des hypocycloïdes intérieures. Nous supposons, en conséquence, que dans les deux cercles générateurs l'angle de rotation u est positif. Les rayons de courbure des deux cycloïdales étant ϱ_1 et ϱ_2, on a alors

$$\varrho_1 = \frac{(a_1 - b)\sqrt[3]{a_1^2 + p_1^2 - 2\,a_1\,p_1 \cos u}}{a_1^3 + (a_1 - b)\,p_1^2 - a_1 p_1\,(2\,a_1 - b)\cos u}$$

et

$$\varrho = \frac{(a_2 - b)\sqrt[3]{a_2^2 + p_2^2 - 2\,a_2\,p_2 \cos u}}{a_2^3 + (a_2 - b)p_2^2 - a_2 p_2\,(2\,a_2 - b)\cos u}.$$

En substituant dans la seconde de ces équations

$$a_2 = b - a_1 \text{ et } p_2 = \frac{a_1\,(b - a_1)}{p_1},$$

on trouve pour le rapport des rayons de courbure

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -\frac{p_1}{a_1};$$

ce rapport est donc constant pour des valeurs égales de u. En outre, on a pour les deux cycloïdales, dans chacun des triangles formés par le point de contact A, le centre de courbure C et le point générateur P,

$$a_1 \sin \alpha_1 = p_1 \sin (u + a_1) \text{ et } a_2 \sin \alpha_2 = p_2 \sin (u + \alpha_2).$$

Par la multiplication on trouve, attendu que $\alpha_1\, a_2 = p_1 p_2$,

$$\sin \alpha_1 \,.\, \sin \alpha_2 = \sin (u + \alpha_1) \,.\, \sin (u + \alpha_2),$$

d'où résulte, après développement et réduction,

$$Tg\, u = -\, Tg\, (\alpha_1 + \alpha_2),$$

c'est-à-dire

$$u + \alpha_1 + a_2 = \pi,$$

et par conséquent, pour $u = 0$,

$$(a_1)_0 + (\alpha_2)_0 = \pi.$$

Ce résultat étant rapproché des relations

$$b v_1 = a_1 u \quad \text{et} \quad b v_2 = a_2 u,$$
$$w_1 - v_1 = \alpha_1 - (\alpha_1)_0 \text{ et } w_2 - v_2 = \alpha_2 - (\alpha_2)_0,$$

d'où résulte par addition

$$v_1 + v_2 = u,$$
$$w_1 + w_2 - (v_1 + v_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - ((\alpha_2)_0 + (\alpha_2)_0),$$

on voit qu'on a

$$w_1 + w_2 = 0,$$

ou

$$w_1 = - w_2.$$

Si l'on représente donc par

$$\varrho_1 = (w) \quad \text{et} \quad \varrho_2 = \varphi_2 (w)$$

les équations essentielles des deux cycloidales, il est prouvé, par ce qui précède, que des valeurs arithmétiques égales de w donnent pour ϱ_1 et ϱ_2 des valeurs qui ont un rapport constant, — condition nécessaire et suffisante de la similitude.

Pour $p_1 = a_1$ et $p_2 = a_2$, on a $\varrho_1 = \varrho_2$: la similitude se change alors en congruence.

L'étude des différentes formes des courbes cycloïdiques peut donc être restreinte à celle des hypocycloïdes extérieures et des hypocycloïdes intérieures, pour lesquelles on $\alpha > \frac{1}{2} b$.

---

8. Points d'inflexion et sommets des hypocycloïdes.

L'équation du cercle des points d'inflexion est

$$v + \frac{ab}{a - b} \cos \alpha = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Son diamètre est donc constant et $= \frac{ab}{a - b}$; le cercle lui-même est situé, pour les hypocycloïdes intérieures, du même côté de la tangente que le cercle générateur, et de l'autre côté pour les hypocycloïdes extérieures.

L'équation de la focale devient, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut (p. 16).

$$\sin\alpha \left\{ (a - 2b) r + 3ab \cos\alpha \right\} = 0.$$

Cette courbe est donc transformée en une droite

$$\sin\alpha = 0,$$

qui est la normale au point de contact, et en un cercle

$$r + \frac{3ab}{a - 2b} \cos\alpha = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

dont le diamètre est constant et $= \frac{3ab}{a - 2b}$. Ce cercle, que nous appellerons *cercle des sommets*, est situé, par rapport à la tangente, à l'autre ou au même côté que le cercle générateur, suivant qu'on a $a \gtrless 2b$.

Nous classerons les différentes formes hypocycloïdiques d'après l'existence de points d'inflexion et de sommets et d'après la situation relative de ces points. A cet effet, imaginons que la droite, qui à l'origine du mouvement est normale aux deux cercles, soit invariablement liée au cercle générateur et se meuve avec celui-ci. Les divers points de cette droite, qui se trouvent avec le point de contact au même côté du centre de courbure du cercle générateur, décrivent alors toutes les cycloïdales possibles; nous avons donc seulement à déterminer en quels points cette droite peut couper ou toucher le cercle des points d'inflexion et le cercle des sommets.

Si dans les équations de ces cercles on substitue

$$r = \sqrt{a + p^2 - 2ap\cos u} \text{ et } \cos\alpha = \frac{a - p\cos u}{r},$$

la première devient

$$a^3 + (a - b)p^2 - ap(2a - b)\cos u_1 = 0,$$

équation qui nous permet de déterminer après quel angle de rotation u_1 un certain point, situé à la distance p du centre du cercle générateur, formera un point d'inflexion. En général, on a

$$\cos u_1 = \frac{a^3 + (a - b)p^2}{ap(2a - b)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Mais cette valeur n'est réelle que pour

$$-ap(2a-b) < a^3 + (a-b)p^2 < ap(2a-b),$$

c'est-à-dire pour

$$(a-b)p^2 + a(2a-b)p + a^3 > 0$$

et $$(a-b)p^2 - a(2a-b)p + a^3 < 0,$$

ou pour $\{(a-b)p + a^2\}(p+a) > 0$
et $\{(a-b)p - a^2\}(p-a) < 0.$ . . . . . (25)

Les points pour lesquels p satisfait à ces conditions formeront seuls un point d'inflexion.

De même, l'équation du cercle des sommets peut être écrite sous la forme

$$a^2(a+b) + (a-2b)p^2 - ap(2a-b)\cos u_2 = 0,$$

en désignant par u_2 l'angle de rotation après lequel le point générateur forme un sommet. Pour obtenir des valeurs réelles, toutefois, il faut qu'on ait

$$-ap(2a-b) < a^2(a+b) + (a-2b)p^2 < ap(2a-b),$$

c'est-à-dire $$(a-2b)p^2 + a(2a-b)p + a^2(a+b) > 0$$

et $$(a-2b)p^2 - a(2a-b)p + a^2(a+b) < 0,$$

ou bien $\{(a-2b)p + a(a+b)\}(p+a) > 0$
$\{(a-2b)p - a(a+b)\}(p-a) < 0.$ . . . . . (26)

Dans le cas seulement où p satisfait à ces conditions, la cycloïdale possède un sommet.

Il y a encore une question dont nous pouvons d'avance indiquer le point de départ. Il s'agit de savoir si aux divers sommets le rayon de courbure atteint une valeur maximum ou minimum, cas que nous distinguerons par les dénominations de *sommets-maximum* et *sommets-minimum*. Il faut remarquer toutefois que, si ϱ est négatif, la valeur de ϱ sera un minimum dans un sommet-maximum, et un maximum dans un sommet-minimum. Il est par conséquent nécessaire de déterminer chaque fois le signe de ϱ et le signe du second coefficient différentiel. Mais on n'a pas besoin de se livrer à un examen direct pour chacun des sommets

qu'une cycloïdale peut présenter. En effet, lorsqu'on sait pour le premier de ces points si c'est un sommet-maximum ou un sommet-minimum, la question se laisse facilement résoudre à l'égard des autres par la considération du cours ultérieur de la courbe. Or, toute hypocycloïde forme un sommet au moment où le mouvement commence, c'est-à-dire pour $u = 0$. Il suffit donc de chercher quel est le signe de la valeur ϱ_0 de ϱ pour $u = 0$, et quel est le signe de la valeur correspondante $\left(\frac{d^2\varrho}{du^2}\right)_0$ du second coefficient différentiel.

En général, on a

$$\varrho_0 = \frac{(a-b)r_0{}^3}{a^3+(a-b)p^2-a(2a-b)p} = \frac{(a-b)r_0{}^3}{\{(a-b)p-a^2\}(p-a)} \quad . \quad (2)$$

où $r_0 = \pm(p-a)$, suivant qu'on a $p \gtrless a$. On trouvera ensuite

$$\left(\frac{d^2\varrho}{du^2}\right)_0 = \frac{a(a-b)pr_0}{\{a^3+(a-b)p^2-ap(2a-b\}^2}\{a-2b)p^2-a(2a-b)p+a^2(a+b)\}$$

$$= \frac{a(a-b)pr_0}{\{(a-b)p-a^2\}^2} \cdot \frac{(a-2b)p-a(a+b)}{p-a}; \quad . \quad . \quad (28)$$

de sorte que le signe de $\left(\frac{d^2\varrho}{du^2}\right)_0$ est égal ou opposé à celui de

$$\frac{(a-2b)p-a(a+b)}{p-a},$$

suivant qu'on a $a \gtrless b$.

---

9. Considérations géométriques.

Soient (fig. 4) C_0 le centre du cercle générateur K à l'origine du mouvement, et C' celui du cercle directeur K'. Pour le diamètre du cerle B des points d'inflexion, dont nous représenterons la longueur par μ, et pour celui du cercle T des sommets, dont la longueur sera désignée par ν, nous avons trouvé

$$\mu = \pm \frac{ab}{a-b}, \text{ suivant qu'on a } a \gtrless b,$$

$$\nu = \pm \frac{3ab}{a-2b}, \text{ suivant qu'on a } a \gtrless 2b.$$

Les deux cercles B et T passent toujours par le point de contact A des cercles K et K'; leurs centres m et n sont situés sur la droite qui passe par C et C', soit à l'autre côté de A que C', soit au même côté, selon qu'il faut employer le signe supérieur ou le signe inférieur pour les valeurs de μ et de ν.

Dans la figure, on a $a > 2b$. Prenons maintenant le milieu k de $A_0 C'$, décrivons sur $k C_0$ un demi-cercle, et menons dans ce demi-cercle les cordes $kl = kC'$ et $kr = kt$; traçons ensuite $C_0 l$ et $C_0 r$, qui coupent le cercle K en s et en q, et enfin $kx \parallel C's$ et $ky \parallel tq$; alors $A_0 m = sx$ est le rayon du cercle des points d'inflexion, et $A_0 n = qy$ celui du cercle des sommets. On a, en effet,

$$\frac{sx}{sC} = \frac{kC'}{C'C_0}, \text{ ou } sk = \frac{\frac{1}{2}ab}{a-b} = \tfrac{1}{2}\mu,$$

et

$$\frac{yq}{qC} = \frac{kt}{tC_0}, \text{ ou } yq = \frac{\frac{3}{2}ab}{a-2b} = \tfrac{1}{2}\nu.$$

On obtient, il est vrai, les mêmes proportions, quelle que soit la direction dans laquelle sont tracées les droites $C_0 s$ et $C_0 q$; mais, par la construction donnée, les droites $C_0 x$ et $C_0 y$ deviennent en même temps tangentes aux cercles qu'il s'agit de construire; car on trouve facilement que les perpendiculaires abaissées de m et n sur les droites $C_0 x$ et $C_0 y$ sont respectivement égales à

$$\frac{mC_0}{kC_0} \cdot kl = \frac{xC_0}{kC_0} \cdot kC' = sx = \tfrac{1}{2}\mu,$$

et

$$\frac{nC_0}{kC_0} \cdot kr = \frac{yC_0}{kC_0} \cdot kt = qy = \tfrac{1}{2}\nu.$$

Pendant que le cercle générateur se meut, le cercle des points d'inflexion et le cercle des sommets roulent sur sa circonférence, en passant toujours par son point de contact avec le cercle directeur. La droite CA_0, au contraire, qui contient tous les points générateurs et que nous appellerons pour cette raison la *droite des points générateurs*, accompagne simplement le cercle générateur dans son mouvement, et par conséquent ne change pas de position par rapport à lui. Si donc, en divers points A′, A″ etc. du cercle générateur, nous traçons les deux cercles B et T, nous connaissons la position que ces cercles occupent relativement à la droite des points générateurs, au moment où les points A′, A′ etc. sont arrivés sur le cercle directeur. Nous voyons alors immédiatement quels sont les points générateurs qui peuvent former des points d'inflexion et des sommets, et à quel moment cela arrive. Si, par exemple, K a décrit l'angle $u = A_0 C_0 A'$, de sorte que les points m et n aient pris par rapport à ce cercle les positions m' et n', alors les points P_1 et P_2, où la droite $C_0 A_0$ est coupée par le cercle des points d'inflexion, formeront leurs inflexions; tandis que les intersections Q_1 et Q_2 de $A_0 C_0$ avec le cercle des sommets forment leurs sommets.

Mais le lieu géométrique de tous les points qui pour une certaine position de K forment un sommet, lieu qui est en général la *focale*, consiste chez les courbes cycloïdiques dans le cercle T et la droite Cn. La droite $C_0 A_0$ peut avoir avec le cercle T deux points communs, tandis qu'elle coupe la droite Cn au point C, ou bien la recouvre. Ce dernier cas a lieu dans l'état d'origine et au moment où le cercle K a roulé de 180°. Pour $u = 0$ et $u = \pi$ tous les points générateurs forment donc des sommets, — sauf le point A_0, qui fait un rebroussement pour $u = 0$. Aux deux sommets ainsi formés nous donnerons le nom de *sommet initial* et de *sommet terminal.*

Un troisième sommet, ou *sommet intermédiaire*, peut seulement se produire lorsque le point générateur est d'abord situé à l'intérieur du cercle des sommets, par conséquent entre A_0 et Q_0, de sorte que sa distance p à C_0 satisfait à la condition

$$a < p < a + \nu,$$

ou

$$a < p < \frac{a(a+b)}{a-2b}.$$

De même, il n'y a que les points situés entre A_0 et P_0 qui puissent former des points d'inflexion; leurs distances à C doivent donc satisfaire à la condition

$$a < p < a + \mu,$$

ou

$$a < p < \frac{a^2}{a-b}.$$

Lorsque le cercle K a roulé de l'angle u', moment où le cercle B est tangent à la droite $C_0 A_0$, tous les points d'inflexion sont formés. Or cet angle u' est précisément l'angle $x C_0 m$, et est déterminé par la relation

$$\sin u' = \frac{kl}{kC_0} = \frac{\frac{1}{2}b}{a-\frac{1}{2}b} = \frac{b}{2a-b}.$$

Pareillement, on trouve l'angle u'', dont K a roulé lorsque le dernier sommet intermédiaire est formé, au moyen de la relation

$$\sin u'' = \frac{kr}{kC_0} = \frac{\frac{3}{2}b}{a-\frac{1}{2}b} = \frac{3b}{2a-b}.$$

Tous ces résultats ont été obtenus dans la supposition que les cercles B et T soient situés à l'extérieur.

La fig. 5 représente le cas où ces deux cercles touchent le cercle générateur en dedans, et où l'on a donc $a < b$.

La construction des centres peut alors se faire de la manière suivante.

Menons par C_0 une droite quelconque; soit s un des points où cette droite coupe K. Joignons s à C' et à t, et du milieu k de $C' A_0$ menons les droites $kx \parallel sC'$ et $ky \parallel st$; on a alors

$$sk = \frac{sC_0}{C_0 C'} \cdot kC' = \frac{\frac{1}{2}ab}{b-a} = \frac{1}{2}\mu,$$

et

$$sy = \frac{sC_0}{C_0 t} \cdot kt = \frac{\frac{3}{2}ab}{2b-a} = \frac{1}{2}\nu.$$

Dans la figure, on a $\frac{1}{2}\mu < b$ et $\frac{1}{2}\nu > b$. Mais on reconnaîtra que la relation entre a et b peut être choisie de telle sorte que les cercles B et T tombent tous les deux en dehors ou tous les deux en dedans de K, ou que l'un d'eux coïncide avec K'. Si l'on demande, en effet, dans quelles circonstances on a

$$\frac{1}{2}\mu \text{ ou } \frac{\frac{1}{2}ab}{b-a} \gtrless b,$$

la réponse est: lorsque $a \gtrless \frac{2}{3}b$.

D'autre part, on a $\frac{1}{2}\nu$ ou $\frac{\frac{3}{2}ab}{2b-a} \gtrless b$

lorsque $a \gtrless \frac{4}{5}b$.

Pour $a = \frac{2}{3}b$ *tous* les points d'inflexion tombent donc sur le cercle directeur (voir fig. 15*a*), pour $a = \frac{4}{5}b$ *tous* les sommets intermédiaires tombent sur ce cercle (fig. 14).

Mais, soit que les points d'inflexion ou les sommets intermédiaires se forment tous *en dehors*, ou tous *sur la circonférence*, ou tous *en dedans* du cercle directeur, toujours il y a, sous deux rapports, une différence essentielle entre les résultats que fournit la fig. 5 et ceux auxquels a conduit la fig. 4. D'abord, dans la fig. 5, la direction positive de la droite des points générateurs — c'est-à-dire la direction de C_0 vers A_0 — ne donnera jamais qu'*un seul* point d'intersection avec chacun des deux cercles B et T. Il n'y a donc, à chaque instant, qu'un seul point générateur qui forme un point d'inflexion ou un sommet intermédiaire. Nous ne considérons, en effet, que les points générateurs dont les distances à C_0 sont positives; parce que les points situés à l'autre côté de C_0 occupent, par rapport au cercle générateur, la même position que les points considérés par nous prennent au bout d'une demi-révolution. En second lieu, les cercles B et T, quel que soit le point où ils touchent le cercle générateur, couperont toujours la droite $C_0 A_0$; de sorte qu'il n'y a aucune valeur de u pour laquelle il ne se forme pas un point d'inflexion et des sommets intermédiaires; cela s'accorde avec la

circonstance que dans la fig. 5 on ne peut pas, comme dans la fig. 4, mener de C_0 des tangentes à B et à T. Du reste, dans la fig. 5, tout comme dans la fig. 4, les points de la droite $C_0 A_0$ qui peuvent décrire des points d'inflexion et des sommets intermédiaires sont compris entre certaines limites. Comme a est toujours supposé $> \frac{1}{2} b$, et que par conséquent C_0 se trouve toujours entre k et C', sx et sy seront constamment, en vertu de la construction, plus grands que $C_0 s$; il en résulte qu'aucun point situé entre C_0 et A_0 ne peut jamais former un point d'inflexion ou un sommet intermédiaire. Si l'on fait rouler les cercles B et T sur K, leurs intersections avec $C_0 A_0$ s'éloigneront de plus en plus de C_0, jusqu'à ce qu'elles soient parvenues en t, après quoi elles se rapprocheront de nouveau de C_0. Des points d'inflexion peuvent donc seulement être formés par les points situés entre A_0 et P_0, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$a < p < \mu - a,$$

ou

$$a < p < \frac{a^2}{b - a};$$

des sommets intermédiaires ne peuvent se produire que pour les points situés entre A_0 et Q_0, c'est-à-dire pour

$$a < p < \nu - a,$$

ou

$$a < p < \frac{a(a + b)}{2b - a}.$$

Les fig. 4 et 5 ont été construites pour les deux cas $a > 2b$ et $\frac{1}{2} b < a < b$. Mais lorsqu'on a $b < a < 2b$ (fig. 12 et 13), le cercle des points d'inflexion est situé en dehors, le cercle des sommets en dedans. Au premier s'applique alors la construction de la fig. 4, au second celle de la fig. 5.

Si l'on veut construire les lignes cycloïdiques décrites par les divers points de la droite $C_0 A_0$, on n'a qu'à déterminer les différentes positions que prend cette droite lorsque le cercle générateur se meut sur le cercle directeur. A cet effet, il faut prendre sur ces cercles, à partir de A_0, des arcs de même

longueur, par exemple $A_0 a_1 = A_0 a_2$ (fig. 4). Le cercle générateur ayant alors roulé de l'angle $A_0 C_0 a_1 = u'''$, a_1 est venu en a_2, et on a angle $A_0 C' a_2 = v'''$. Le point C_0 a décrit un arc de cercle autour de C', en restant toujours dans l'alignement qui passe par le point de contact a_2 et par C'. Or la situation relative de la droite $C_0 A_0$ et du cercle K ne changeant pas durant le mouvement, on n'a qu'à transporter en C l'angle $A_0 C_0 a_1 = u'''$ pour trouver la nouvelle position de $A_0 C_0$. En portant enfin sur cette direction, à partir de C, la distance p qui séparait de C_0 un point générateur quelconque, on aura le lieu que ce point occupe après que le cercle a roulé de l'angle u'''.

C'est de cette manière qu'ont été construites les courbes cycloïdiques qu'on voit dans les figures 9 à 17.

---

10. Considérations analytiques.

Les mêmes résultats peuvent être obtenus par la méthode analytique. Nous présenterons brièvement quelques applications de celle-ci, en partie pour fournir un contrôle à ce qui précède, en partie pour tirer encore quelques conséquences qui se laissent déduire moins facilement de la figure.

Les équations polaires,

$$r + \frac{ab}{a-b} \cos \alpha = 0 \text{ et } r + \frac{3\,ab}{a-2\,b} \cos \alpha = 0,$$

du cercle des points d'inflexion et du cercle des sommets nous ont déjà donné, par la substitution

$$r = \sqrt{a^2 + p^2 - 2\,a\,p \cos u} \text{ et } \cos \alpha = \frac{a - p \cos u}{r},$$

les relations

$$a^3 + (a-b)\,p^2 - a\,p\,(2\,a - b) \cos u_1 = 0, \quad . \; . \; . \quad (27)$$

et

$$a^2\,(a+b) + (a-2b)\,p^2 - a\,p\,(2\,a - b) \cos u_2 = 0, \quad . \; . \; . \quad (28)$$

dans lesquelles u_1 et u_2 désignent les angles de rotation du cercle générateur pour lesquels un point, situé à la distance p de C_0, forme respectivement un point d'inflexion ou un sommet intermédiaire (p. 32). Nous avons aussi déjà fait observer que u_1 n'est réel que lorsqu'on a

$$\{(a-b)p+a^2\}(p+a)>0,$$

et

$$\{(a-b)p-a^2\}(p-a)<0.$$

Or, pour $a>b$, il est toujours satisfait à la première condition, mais à la seconde seulement dans le cas de

$$a<p<\frac{a^2}{a-b}.$$

Pour $a<b$, il est satisfait à la première condition par

$$p<\frac{a^2}{b-a},$$

à la seconde par

$$p>a.$$

En résolvant l'équation (27) par rapport à p, on trouve, après réduction,

$$p=\frac{a(2a-b)\cos u_1 \pm a\sqrt{b^2-(2a-b)^2\sin^2 u_1}}{2(a-b)}.$$

Si l'on a $a>b$, p devient imaginaire pour

$$\sin u_1>\frac{b}{2a-b};$$

tandis que toutes les autres valeurs de u_1 donnent *deux* valeurs positives pour p. Dans le cas de $a<b$, au contraire, on a aussi $2a-b<b$, et p ne peut jamais devenir imaginaire. En outre, des deux signes placés devant le radical, le supérieur seul fournira une valeur positive pour p.

L'angle u_2 n'a de valeurs réelles que s'il est satisfait aux conditions

$$\{(a-2b)p+a(a+b)\}(p+a)>0,$$

et

$$\{(a-2b)p-a(a+b)\}(p-a)<0.$$

Celles-ci sont remplies, dans le cas de $a > 2b$, par

$$a < p < \frac{a(a+b)}{a-2b},$$

dans le cas de $a < 2b$, par

$$a < p < \frac{a(a+b)}{2b-a}.$$

De (28) on tire, en outre,

$$p = \frac{a(2a-b)\cos u_2 \pm a\sqrt{9b^2 - (2a-b)^2 \sin^2 u_2}}{2(a-2b)},$$

expression qui montre que, dans le cas de $a > 2b$, p devient imaginaire pour

$$\sin u_2 > \frac{3b}{2a-b},$$

tandis que toutes les valeurs plus petites de u_2 donnent *deux* valeurs positives pour p. Dans le cas de $a < 2b$, on a aussi $2a - b < 3b$, et *toute* valeur de u_2 donne une valeur positive pour p, mais seulement *une*.

Ces résultats concordent avec ce que nous a appris l'étude géométrique des fig. 4 et 5. Nous résoudrons maintenant encore trois autres questions.

1. A-t-on $u_1 \gtrless u_2$? En d'autres termes, un point générateur, qui forme successivement un point d'inflexion et un sommet intermédiaire, décrit-il *d'abord* le sommet et *ensuite* le point d'inflexion, ou *d'abord* le point d'inflexion et *ensuite* le sommet?

De (27) et (28) on tire

$$\cos u_1 = \frac{a^3 + (a-b)p^2}{ap(2a-b)} \text{ et } \cos u_2 = \frac{a^2(a+b) + (a-2b)p^2}{ap(2a-b)}.$$

Il s'agit donc seulement d'examiner si l'on a

$$a^3 + (a-b)p^2 \gtrless a^2(a+b) + (a-2b)p^2,$$

c'est-à-dire $$-bp^2 \gtrless a^2 b - 2bp^2,$$

ou $$p \gtrless a.$$

Or $p < a$ ne peut jamais donner ni point d'inflexion, ni sommet; on a donc toujours

$$\cos u_1 > \cos u_2,$$

ou

$$u_1 < u_2,$$

puisque u_1 et u_2 sont, en tout cas, plus petits que 180^c.

2. La valeur limite de p, pour laquelle cesse la formation de points d'inflexion, est-elle plus grande ou plus petite que la valeur pour laquelle s'arrête la formation de sommets intermédiaires? En d'autres termes, les hypocycloïdes qui ne peuvent former qu'*un seul* de ces points singuliers, et qui dans les fig. 4 et 5 sont par conséquent situées entre P_0 et Q_0, auront-elles seulement un *point d'inflexion*, ou seulement un *sommet intermédiaire?* Ecrite algébriquement, cette question prend une de ces trois formes

$$\frac{a^2}{a-b} \gtrless \frac{a(a+b)}{a-2b}, \quad \frac{a^2}{a-b} \gtrless \frac{a(a+b)}{2b-a}, \quad \frac{a^2}{b-a} \gtrless \frac{a(a+b)}{2b-a}?$$

c'est-à-dire, après simplification,

$$b \gtrless 2a, \; b^2 + 2ab - 2a^2 \gtrless 0, \; 2a \gtrless b?$$

Elle prend la première, la seconde ou la troisième de ces formes, suivant qu'on a

$$2b < a, \text{ ou } b < a < 2b, \text{ ou } \tfrac{1}{2}b < a < b.$$

Or, dans le *premier* cas, la réponse est:

$$b < 2a, \text{ par conséquent aussi } \frac{a^2}{a-b} < \frac{a(a+b)}{a-2b};$$

dans le *troisième* cas, on a

$$2a > b, \text{ par conséquent aussi } \frac{a^2}{b-a} > \frac{a(a+b)}{2b-a}.$$

Dans le *second* cas la transition a lieu, à savoir pour

$$b^2 + 2ab - 2a^2 = 0,$$

ou

$$a = \tfrac{1}{2}b(\sqrt{3}+1) = 1{,}366\,b.$$

valeur très peu supérieure à $1\frac{4}{11}b$.

Cette transition se fait entre les fig. 12 et 13. Dans la première, on a $\alpha = 1\frac{2}{5}b$, c'est-à-dire plus grand que $1\frac{4}{11}b$; le point P_0, où cesse la formation des points d'inflexion, est encore situé plus bas que Q_0, limite des points qui décrivent des sommets intermédiaires. Dans la seconde figure, on a $\alpha = 1\frac{1}{4}b$, c'est-à-dire plus petit que $1\frac{4}{11}b$; et maintenant P_0 se trouve plus haut que Q_0. Dans la fig. 12, les hypocycloïdes situées entre les lignes $P_0 P P_\pi$ et $Q_0 Q Q_\pi$ ont donc un *sommet intermédiaire* t; dans la fig. 13, elles ont un *point d'inflexion* b.

3. Relativement à la question de savoir dans quels sommets le rayon de courbure aura une valeur *maximum* absolue, et dans dans quels autres il présentera une valeur *minimum* absolue, remarquons d'abord que tout sommet qui précède ou suit un point d'inflexion doit nécessairement être un *sommet minimum*. Appliquons ensuite ce qui a été dit à la fin du § 8 (p. 33) au sujet des signes de ϱ et de $\frac{d^2\varrho}{du^2}$ pour $u = 0$. Les formules

$$\varrho_0 = \frac{(a-b)r_0{}^3}{\{(a-b)p-a^2\}(p-a)} \text{ et } \left(\frac{d^2\varrho}{du^2}\right)_0 = \frac{a(a-b)pr_0}{\{(a-b)p-a^2\}^2} \cdot \frac{(a-2b)p-a(a+b)}{p-a}$$

montrent que

ϱ_0 est *positif* pour $a > b$, lorsqu'on a $p < a$ ou $p > \frac{a^2}{a-b}$;

pour $a < b$, lorsqu'on a $p > a$.

ϱ_0 est *négatif* pour $a > b$, lorsqu'on a $a < p < \frac{a^2}{b-a}$;

pour $a < b$, lorsqu'on a $p < a$.

$\frac{d^2\varrho}{du^2}$ est *positif* pour $a > 2b$, lorsqu'on a $p < a$ ou $p > \frac{a(a+b)}{a-2b}$;

pour $2b > a > b$, lorsqu'on a $p < a$;
pour $b > a$, lorsqu'on a $p > a$.

$\frac{d^2\varrho}{du^2}$ est *négatif* pour $a > 2b$, lorsqu'on a $a < p < \frac{a(a+b)}{a-2b}$;

pour $2b > a > b$, lorsqu'on a $p > a$;
pour $b > a$, lorsqu'on a $p < a$.

Ce tableau nous permet de décider, en chaque cas particulier, si le sommet initial est *positif* ou *négatif*, c'est-à-dire, s'il est *concave* ou *convexe* vers le point de contact commun A_0 des cercles K et K'; et, en outre, si c'est un *sommet maximum* ou un *sommet minimum*. C'est ainsi que pour $a > b$ et $p < a$, et aussi pour $a < b$ et $p > a$, c'est-à-dire pour les *hypocycloïdes extérieures allongées* (fig. 9 à 13) et pour les *hypocycloïdes intérieures raccourcies* (fig. 14 à 17), les sommets initiaux sont toujours des *minima positifs*, parce que ϱ_0 et $\frac{d^2\varrho}{du^2}$ sont alors l'un et l'autre constamment positifs. Pour $a < b$ et $p < a$, au contraire, c'est-à-dire pour les *hypocycloïdes intérieures allongées* (fig. 14 à 17) les sommets initiaux sont des *minima négatifs*, parce que ϱ_0 et $\frac{d^2\varrho}{du^2}$ sont négatifs. Quant aux *hypocycloïdes extérieures raccourcies* (fig. 9 à 13), elles forment, si elles ont un point d'inflexion, toujours un *sommet minimum négatif*; si elles n'en ont point, un *sommet maximum positif*, sauf lorsqu'on a $a > 2b$ et $p > \frac{a(a+b)}{a-2b}$ (fig. 9 et 10, pour les points situés au-dessus de Q_0), cas dans lequel il naît un *sommet minimum positif*.

Il nous reste encore à considérer les différentes formes de passage. En premier lieu, celles qui se produisent lorsque le point générateur est placé aux limites qui déterminent la formation de points d'inflexion et de sommets; en second lieu, celles qui prennent naissance lorsqu'on donne au rapport des rayons de K et K' les valeurs pour lesquelles la situation du cercle des points d'inflexion et celle du cercle des sommets changent par rapport au cercle générateur et au cercle directeur.

Formes de passage fournies par les valeurs limites de p.

Les valeurs limites de p sont:

1. $p = 0$.
2. $p = a$.

3. $p = \pm \frac{a^2}{a-b}$, suivant qu'on a $a \gtrless b$.

4. $p = \pm \frac{a(a+b)}{a-2b}$, suivant qu'on a $a \gtrless 2b$.

1. Pour $p = 0$, l'équation de l'hypocycloïde devient (p. 26) $\varrho = a - b$; la courbe est donc un *cercle*, qui à l'origine du mouvement est *concave* ou *convexe* par rapport au point de contact A_0, selon qu'on a $a \gtrless b$. C'est le cercle que parcourt le centre C du cercle générateur.

2. $p = \alpha$. Cette forme de transition comprend les *hypocycloïdes ordinaires*. L'équation générale de ϱ devient pour $p = a$

$$\varrho = \frac{4a(a-b)}{2a-b} \sin \frac{u}{2}.$$

Des formules des pages 28 à 30, qui, pour $v_0 = 0$, $\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$ et $p = a$, se changent en

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\pi - u), \quad au = bv, \quad w = v + \alpha - \tfrac{1}{2}\pi,$$

résulte, d'un autre côté,

$$\frac{u}{2} = \frac{b}{2a-b} w.$$

L'équation essentielle des hypocycloïdes ordinaires est, par conséquent,

$$\varrho = \frac{4a(a-b}{2a-b} \sin\left(\frac{b}{2a-b} w\right).$$

Vu, toutefois, que la *forme* de ces courbes dépend seulement du rapport $a : b$, nous introduirons celui-ci, et nous le représenterons, en guise de *caractéristique*, par k, en supposant toujours $k > \frac{1}{2}$. L'équation devient alors

$$\varrho = \frac{4bk(k-1)}{2k-1} \sin\left(\frac{1}{2k-1} w\right). \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

L'hypocycloïde est *extérieure* ou *intérieure* suivant qu'on a $k \gtrless 1$.

Le facteur constant $\frac{4bk(k-1)}{2k-1}$ exprime la grandeur que

prend le rayon de courbure lorsqu'on a $\frac{w}{2k-1}$ ou $\frac{u}{2} = \pi$, c'est-à-dire $u = \pi$. Cette valeur est positive ou négative selon qu'on a $k \gtrless 1$; de sorte que dans les hypocycloïdes extérieures (fig. 10 à 13) les sommets extrêmes sont toujours tournés vers le point de contact par les côtés concaves, dans les hypocycloïdes intérieures (fig. 14, et 15*a*) par les côtés convexes.

Chaque fois que $\frac{w}{2k-1} = \frac{u}{2}$ a augmenté de 2π, les mêmes valeurs de ϱ se reproduisent. La série des valeurs que ϱ prend entre $u = 4n\pi$ et $u = 4(n+1)\pi$ constitue une *période* de la *courbe périodique* (voir *Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. I, p. 10). A la vérité, la forme de la courbe entre $u = 2\pi$ et $u = 4\pi$ est exactement la même qu'entre $u = 0$ et $u = 2\pi$; mais, lors du passage de la première moitié de la période à la seconde, le rayon de courbure change de signe; les deux moitiés sont bien égales *géométriquement*, mais non *algébriquement*. Le nombre des points de rebroussement que la courbe a formés après une certaine valeur de v ou de w dépend donc de la *durée* d'une demi-période. Or, après la première demi-période, les valeurs sont devenues

$$u = 2\pi,\ v = \frac{a}{b} \cdot 2\pi = 2k\pi,\ w = \frac{2a-b}{2b} \cdot 2\pi = (2k-1)\pi,$$

et en général, après la $n^{\text{ième}}$ demi-période,

$$u = n \cdot 2\pi,\ v = n \cdot 2k\pi,\ w = n \cdot (2k-1)\pi.$$

Il peut maintenant se présenter deux cas, celui où une demi-période postérieure vient coïncider avec la première, et celui où jamais deux périodes ne se recouvrent. Pour que le *premier* cas se produise, c'est-à-dire pour que la courbe soit fermée après n périodes, il faut que v devienne égal à un nombre entier de fois 2π; il faut donc que n puisse être choisi de façon que nk soit un nombre entier. Si k lui-même est un nombre entier, en d'autres termes, si a est un multiple de b, la seconde demi-période tom-

bera déjà sur la première, et il en sera de même de toutes les suivantes; la courbe ne présente alors qu'une demi-période, et par conséquent ne possède aussi qu'un seul point de rebroussement et un seul sommet, tandis que le cercle directeur est parcouru k fois, et que la tangente à l'hypocycloïde tourne $(2k-1)$ fois de 180°. Si, au contraire, k est égal à la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$, la courbe ne se fermera qu'après $n = \beta$ demi-périodes, et par suite offrira aussi un pareil nombre de points de rebroussement et de sommets.

Le *second* cas, celui où jamais deux périodes ne se recouvrent, se présente lorsque k est un rapport incommensurable.

A l'instant où une hypocycloïde ordinaire se ferme, la droite des points générateurs reprend la position qu'elle occupait à l'origine du mouvement; au même instant se ferment donc aussi toutes les hypocycloïdes allongées et raccourcies.

Les *développées* des hypocycloïdes ordinaires s'obtiennent en différentiant l'équation (29) par rapport à w, attendu qu'en général $\frac{d\varrho}{dw} = \varrho_{-1}$ est le rayon de courbure de la développée d'une courbe. On trouve

$$\varrho_{-1} = \frac{4bk(k-1)}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{1}{2k-1} w\right),$$

ou, en faisant tourner la direction principale de manière qu'on ait

$$\frac{1}{2k-1} w = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{2k-1} w',$$

$$\varrho_{-1} = \frac{4bk(k-1)}{(2k-1)^2} \sin\left(\frac{1}{2k-1} w'\right).$$

On voit que la développée d'une hypocycloïde ordinaire est elle-même une hypocycloïde ordinaire, semblable à la première, mais de dimensions $(2k-1)$ fois plus petites.

Réciproquement, on trouve par intégration le rayon de courbure de la *développante* d'une hypocycloïde ordinaire. En le désignant par ϱ_1, on a

$$\varrho_1 = C - 4\,b\,k\,(k-1)\cos\left(\frac{1}{2k-1}w\right).$$

Cette courbe, naturellement, sera de nouveau une hypocycloïde si l'on prend $C = 0$, c'est-à-dire, si le développement commence à un sommet. Mais si on opère le développement à partir d'un point de rebroussement, on a $\varrho_1 = 0$ pour $w = 0$, et l'équation de la développante devient

$$\varrho_1 = 8\,b\,k\,(k-1)\sin^2\left(\frac{1}{2(2k-1)}w\right).$$

Cette équation montre que les courbes en question ne peuvent avoir ni points de rebroussement, ni points d'inflexion, attendu que ϱ_1 ne change de signe pour aucune valeur de w. Elles ne possèdent que des sommets, à savoir, pour

$w = n\pi$, ce qui donne $\varrho_1 = 0$;
et $w = (n+1)(2k-1)\pi$, „ „ „ $\varrho_1 = 8\,b\,k(k-1)$.

Il existe une valeur de k pour laquelle ces derniers sommets passent tous par un même point, qui ne saurait être aucun autre que le centre du cercle directeur. Ce cas ne peut donc se présenter que pour les hypocycloïdes intérieures; $8\,bk\,(1-k)$ est alors la valeur absolue du rayon de courbure ϱ_1, et cette valeur doit être égale à b. En résolvant l'équation

$$8\,kb\,(1-k) = b,$$

on trouve $k = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{2})$,
et par suite $a = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})\,b$.

Ces deux valeurs de a fournissent la même hypocycloïde, attendu que leur somme est égale à b. Cette hypocycloïde est tracée dans la fig. 6, où l'on a pris $a = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})\,b$, et où la ligne pointillée extérieure représente la *développée*, la ligne pointillée intérieure la *développante* de l'hypocycloïde. Les courbes ne sont pas fermées, car k est incommensurable.

C'est ici le lieu de démontrer *que l'enveloppe des différentes positions que la droite des points générateurs prend pendant le mouvement du cercle générateur est une hypocycloïde ordinaire.*

A cet effet, remarquons d'abord que tout point invariablement lié au cercle générateur possède, à chaque instant, une vitesse perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point de contact A des deux cercles K et K' (fig. 7). Cela s'applique donc aussi à tous les points de la droite P C qui joint un point générateur quelconque P au centre C du cercle générateur K, et qui à l'origine du mouvement passait en outre par le centre C′ du cercle directeur. Il en résulte que le seul point qui se meut à chaque instant le long de P C, point qui par suite décrit la courbe à laquelle P C est toujours tangente, est le pied Q de la perpendiculaire abaissée de A sur P C. Par conséquent, l'enveloppe de la droite P C est en même temps le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées sur P C des points où K et K' se touchent successivement; et le centre de courbure O de l'enveloppe est situé sur cette perpendiculaire ou sur son prolongement.

Soit maintenant (fig. 7) A_0 le point de contact de K et K' à l'origine du mouvement; $A_0 C'$ est alors la situation initiale de la droite P C, et par conséquent $P L A_0 = w$ est l'angle dont cette droite a tourné. Mais on a

$$\llcorner A_0 C' A = v \text{ et } \llcorner P C A = u;$$

donc
$$w = v - u,$$

et
$$dw = dv - du,$$

c'est-à-dire, que la vitesse angulaire de la droite P C est égale à la différence des vitesses de rotation de A autour de C′ et de A autour de C. Si A B représente la vitesse linéaire de A, la vitesse angulaire avec laquelle P C tourne autour de Q sera donc

$$\frac{AB}{AC'} - \frac{AB}{AC}.$$

Décomposons A B en A F, le long de A Q, et en A G, perpendiculaire à A Q; et remarquons que la vitesse angulaire de A Q autour de O est la même que la vitesse angulaire de P C autour de Q, vu que ces deux droites restent toujours perpendiculaires l'une à l'autre; on doit alors avoir

$$\frac{AG}{AO} = \frac{AB}{AC'} - \frac{AB}{AC}.$$

Mais on a $$AG = AB \sin u;$$

$$AO = AQ + \varrho = AC \sin u + \varrho,$$

ϱ désignant le rayon de courbure QO;

$$AC' = b;$$

$$AC = a;$$

la substitution de ces valeurs donne

$$\frac{\sin u}{a \sin u + \varrho} = \frac{a-b}{ab};$$

d'où $$\varrho = \frac{a(2b-a)}{a-b} \sin u,$$

ou $$\varrho = \frac{a(2b-a)}{a-b} \sin\left(\frac{b}{a-b} w\right); \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

vu qu'on a $$w = v - u = \frac{a}{b} u - u = \frac{a-b}{b} u,$$

et par conséquent $$u = \frac{b}{a-b} w.$$

Le lieu géométrique des points Q est donc une courbe de la forme

$$\varrho = m \sin \mu w, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

c'est-à-dire, toujours une hypocycloïde ordinaire; car dans tous les cas les rayons a' et b' de deux cercles peuvent être déterminés de telle sorte que l'équation se change en celle-ci

$$\varrho = \frac{4b'k'(k'-1)}{2k'-1} \sin\left(\frac{1}{2k'-1} w\right),$$

où $k' = \frac{a'}{b'}$. Pour cela, il faut qu'on ait en général

$$\frac{1}{2k'-1} = \mu \text{ et } \frac{4b'k'(k'-1)}{2k'-1} = m,$$

ou $$k' = \frac{\mu+1}{2\mu} \text{ et } b' = \frac{m\mu}{1-\mu^2}.$$

Mais le facteur μ détermine exclusivement la *forme* de la courbe, la constante m n'a d'influence que sur la *dimension*. S'il n'est donc satisfait qu'à la première de ces deux conditions, on obtient une hypocycloïde *semblable* à la courbe (31); s'il est satisfait en outre à la seconde condition, l'hypocycloïde sera *congruente* à cette courbe. Or, dans l'équation (4), on a

$$\mu = \frac{b}{a-b} \text{ et } m = \frac{a(2b-a)}{a-b}.$$

Nous trouvons donc, en premier lieu,

$$k' = \frac{a}{2b} = \frac{\frac{1}{2}a}{b}.$$

Par conséquent, si dans la fig. 7, sur le même cercle directeur k', roule un cercle générateur dont le rayon est égal à $\frac{1}{2}$ A C, celui-ci produit une hypocycloïde ordinaire, *semblable* à la courbe à laquelle P C est toujours tangente. Veut-on avoir l'hypocycloïde qui est *égale* à cette courbe, alors le rayon du cercle directeur n'est plus arbitraire, mais égal à

$$\frac{m\mu}{1-\mu^2};$$

après substitution des valeurs de μ et m, on trouve, toutefois,

$$b' = -b,$$

ce qui indique que le rayon b' du cercle directeur doit avoir la même longueur que A C'. L'hypocycloïde qui vient d'être décrite se trouve donc être égale et semblable à la courbe (30).

L'état négatif de b', et par conséquent aussi — puisque k' est positif — de a', n'a rapport ni à la forme, ni à la grandeur, mais seulement à la *situation*, qui naturellement n'a pas d'influence sur le résultat obtenu.

Comme deux cercles générateurs dont la somme des rayons est égale au rayon du cercle directeur décrivent la même hypocycloïde, on peut tout aussi bien prendre a' égal à $b - \frac{1}{2}a$. Or, on peut avoir $b - \frac{1}{2}a = a$, ou

$$a = \tfrac{2}{3}b;$$

dans ce cas particulier, le cercle générateur et la droite des points générateurs fourniront *les mêmes* hypocycloïdes ordinaires. On voit la réalisation de ce cas dans la fig. 15*a*, où la courbe $A_0 A_\pi$ est l'enveloppe de la droite P C; et cette enveloppe est égale et semblable à l'hypocycloïde ordinaire décrite par le cercle *K*. Mais les deux courbes sont situées aux deux côtés opposés de la droite $A_0 C'$.

3. $p = \pm \frac{a^2}{a-b}$, suivant qu'on a $a \gtrless b$. L'équation de ces hypocycloïdes allongées, décrites dans les fig. 9 à 17 par le point P_0, est

$$\varrho = \frac{\sqrt{b^2 + 2a(a-b)(1 \mp \cos u)}^3}{(a-b)(2a-b)(1 \mp \cos u)}.$$

Pour $\cos u = \pm 1$ on a $\varrho = \infty$, ce qui arrive donc dans les hypocycycloïdes *extérieures* pour $u = 0$, dans les hypocycloïdes *intérieures* pour $u = \pi$. Cette valeur de ϱ provient de la coïncidence du point d'inflexion avec le sommet initial ou avec le sommet terminal. La forme de sommet est conservée dans ce cas, ainsi qu'il résulte déjà de la considération géométrique; d'ailleurs, la formule algébrique montre que ϱ ne change pas de signe en passant par ∞.

Si a est $> \frac{1}{2} b(\sqrt{3}+1)$, P_0 forme, comme nous l'avons déjà vu, un sommet intermédiaire, dans lequel le rayon de courbure atteint un minimum. Si a est $< \frac{1}{2} b(\sqrt{3}+1)$, le rayon de courbure continue à décroître jusqu'au sommet final.

4. $p = \pm \frac{a(a+b)}{a-2b}$, suivant qu'on a $a \gtrless 2b$. L'équation de ces hypocycloïdes allongées, décrites dans les figures par le point Q_0, est

$$\varrho = \pm \frac{a(a-b)}{(a-2b)(2a-b)} \cdot \frac{\sqrt{9b^2 + 2(a-2b)(a+b)(1 \mp \cos u)}^3}{3b^2 + (a-2b)(a+b)(1 \mp \cos u)},$$

où les signes supérieurs conviennent au cas de $a > 2b$, les signes

inférieurs au cas de $a < 2b$. Ces courbes ont ou n'ont pas de point d'inflexion, suivant qu'on a $a \gtrless \frac{1}{2} b (\sqrt{3} + 1)$.

Comme $p = \pm \frac{a(a+b)}{a-2b}$ est la valeur limite pour la formation de sommets intermédiaires, $u = 0$, dans le cas de $a > 2b$, et $u = \pi$, dans le cas de $a < 2b$, fournissent un sommet, qui résulte en quelque sorte de la réunion de deux sommets successifs, dont l'un doit toujours être un sommet maximum et l'autre un sommet minimum, attendu qu'il n'y a entre eux aucun point d'inflexion. Il s'agit maintenant de savoir si cette réunion donne lieu à un sommet maximum ou à un sommet minimum. Le signe de $\left(\frac{d^2 \varrho}{du^2}\right)_0$ ne peut pas entièrement nous éclairer à ce sujet, vu qu'il disparaît pour $p = \frac{a(a+b)}{a-2b}$. Mais pour $p = \frac{a(a+b)}{2b-a}$, c'est-à-dire quand on a $a < 2b$, ce signe devient *négatief* dans le cas de $a > b$, *positif* dans le cas de $a < b$, tandis que le rayon de courbure devient alors

$$\varrho_0 = -\frac{a(a-b)(2a-b)^2}{(a-2b)(2a^2-2ab-b^2)} =$$

$$= -\frac{a(a-b)(2a-b)^2}{2(a-2b)\{a-\frac{1}{2}b(\sqrt{3}+1)\}\{a+\frac{1}{2}b(\sqrt{3}+1)\}}.$$

Ainsi l'on a

ϱ_0 *positif*,	lorsque	a est $> \frac{1}{2} b (\sqrt{3} + 1)$:	*sommet maximum.*
négatif,	lorsque	$\frac{1}{2} b (\sqrt{3}+1)$ est $> a > b$:	*sommet minimum.*
positif,	lorsque	b est $> a$:	*sommet minimum.*

Dans le premier de ces cas, la courbe n'a pas de point d'inflexion; par conséquent le sommet final, avec lequel se confond le sommet intermédiaire, doit être un *sommet minimum.* Dans le second et le troisième cas, la courbe possède un point d'inflexion; de sorte que la réunion des deux sommets fournit de nouveau un *sommet minimum.*

Un moyen plus facile, toutefois, et qui embrasse tous les cas,

est de chercher si, pour des valeurs de u qui diffèrent très peu de 0 et de π, ϱ est plus grand ou plus petit que ϱ_0. Pour u très près de 0 la valeur de

$$(a - 2b)(a + b)(1 - \cos u),$$

et pour u très près de π la valeur de

$$(2b - a)(a + b)(1 + \cos u),$$

sont très petites, par ex. $= \delta$; et il s'agit seulement de savoir si

$$\frac{(9b^2 \pm 2\delta)^3}{(3b^2 \pm \delta)^2} - \left(\frac{27b^3}{3b^2}\right)^2$$

est positif ou négatif. Après développement, on trouve

$$\frac{27b^2 \pm 8\delta}{(3b^2 \pm \delta)^2} \cdot \delta^2,$$

c'est-à-dire, une valeur constamment positive; ϱ est donc dans tous les cas croissant, en d'autres termes, la réunion du sommet intermédiaire avec le sommet terminal fournit toujours un *sommet minimum.*

---

11. Formes de passage fournies par les valeurs limites de $\frac{a}{b}$.

Les valeurs limites de $\frac{a}{b}$ sont:

1. $\frac{a}{b} = \infty$.

2. $\frac{a}{b} = 2$.

3. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

4. $\frac{a}{b} = 1$.

5. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

1. $\frac{a}{b} = \infty$ (fig. 9). Lorsque a est $= \infty$, le cercle générateur devient une ligne droite. La courbe décrite par un point de cette droite n'est ordinairement pas rangée parmi les cycloïdales, mais simplement considérée comme la développante du cercle. Nous lui conserverons ce nom, auquel nous donnerons, toutefois, une acception plus large, en parlant de *développantes allongées* et *développantes raccourcies du cercle*, lorsque le point générateur ne se trouve pas *sur* la ligne génératrice, mais *en dehors*, soit au *même côté* que le cercle directeur, soit au *côté opposé*.

L'équation trouvée pour les hypocycloïdes ne peut pas être rendue applicable à ce cas. Nous reprenons donc l'équation générale des cycloïdales

$$\varrho = \frac{(R - R')\, r^2}{(R - R')\, r + R R' \cos \alpha},$$

et nous y faisons $R = \infty$ et $R' = b$, ce qui la transforme en

$$\varrho = \frac{r^2}{r + b \cos \alpha}.$$

Au lieu de l'arc u, nous introduisons la longueur correspondante l de la partie de la droite génératrice qui, depuis l'origine du mouvement, a été en contact avec le cercle directeur; et, au lieu de la distance p du point générateur au centre du cercle générateur, nous introduisons la distance q du point générateur au point de contact qui correspond à l'origine du mouvement. Cette grandeur q, qui détermine donc la place du point générateur, nous l'appelons *positive* lorsque ce point est situé, par rapport au point de contact, *au même côté* que le cercle directeur, *négative* lorsqu'il est situé *au côté opposé*. Dans la fig. 8, C' représente le centre du cercle directeur, A_0 le point de contact à l'origine du mouvement, et P le point générateur; de sorte qu'on a $A_0A = l$, $A_0P = q$, $PA = r$ et $\llcorner PAC' = \alpha$. On trouve immédiatement

$$r^2 = l^2 + q^2 \text{ et } \cos \alpha = \frac{q}{r}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation, on obtient

$$\varrho = \frac{\sqrt{l^2 + q^2}^3}{l^2 + q^2 + bq}.$$

Les équations polaires du cercle des points d'inflexion et du cercle des sommets deviennent

$$r + b \cos \alpha = 0 \text{ et } r + 3b \cos \alpha = 0;$$

le diamètre du premier est donc toujours égal à *une fois* le rayon du cercle directeur, celui du second égal à *trois fois* ce même rayon. Les deux cercles en question se trouvent toujours, relativement au cercle directeur, à l'autre côté de la tangente (fig. 9). En introduisant les grandeurs l et q dans ces équations, on trouve

$$l^2 + q^2 + bq = 0 \text{ et } l^2 + q^2 + 3bq = 0;$$

d'où

$$q = -\tfrac{1}{2} b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} b^2 - l^2} \text{ et } q = -\tfrac{3}{2} b \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} b^2 - l^2}.$$

Le dernier point d'inflexion se forme donc pour $l = \frac{1}{2} b$, le dernier sommet intermédiaire pour $l = \frac{3}{2} b$; en outre, $l < \frac{1}{2} b$ donne toujours pour q deux valeurs négatives qui fournissent des points d'inflexion, $l < \frac{3}{2} b$ toujours deux valeurs négatives auxquelles correspondent des sommets intermédiaires. Les développantes *raccourcies* du cercle peuvent donc seules avoir des points d'inflexion ou des sommets intermédiaires. Lorsque $-q$ se trouve entre 0 et b, il se forme, après le sommet initial, d'abord un point d'inflexion et ensuite un sommet intermédiaire; si $-q$ est situé entre b et $3b$, la courbe a un sommet initial et un sommet intermédiaire; enfin pour $-q > 3b$, elle ne possède qu'un seul sommet. Quant à un sommet terminal, par la nature même de la question il ne peut jamais s'en former.

A l'origine du mouvement, on a

$$\varrho_0 = \frac{r_0{}^3}{q(q+b)} \text{ et } \left(\frac{d^2\varrho}{dl^2}\right)_0 = \frac{r_0(q+3b)}{q(q+b)^2}.$$

Des signes de

ϱ_0 et de $\left(\frac{d^2\varrho}{dl^2}\right)_0$, pour $q > 0$, $0 < -q < b$, $b < -q < 3b$ et $-q > 3b$,

on peut inférer si le sommet initial est un sommet maximum ou un sommet minimum. On trouvera que toutes les développantes allongées du cercle, ainsi que les développantes raccourcies dépourvues de sommet intermédiaire, ont pour sommet initial un *sommet minimum positif*; les développantes raccourcies à point d'inflexion ont un *sommet minimum négatif*; les développantes raccourcies sans point d'inflexion et à sommet intermédiaire ont un *sommet maximum positif.*

Il y a trois formes de passage: $q = 0$, $q = -b$ et $q = -3b$.

La première, $q = 0$, donne la développante ordinaire du cercle, qui a pour équation

$$\varrho = l = bv = bw,$$

w étant l'angle que la normale à la courbe, toujours tangente au cercle directeur, a décrit depuis l'origine du mouvement.

La seconde, $q = -b$, a pour équation

$$\varrho = \frac{\sqrt{l^2 + b^2}^3}{l^2}.$$

Dans la fig. 9, cette courbe est décrite par le point P_0. Pour $l = 0$ on a $\varrho = \infty$; mais cette valeur est un sommet maximum, non un point d'inflexion, vu que ϱ ne change pas de signe en passant par ∞. Pour $l = b\sqrt{2}$, il se forme un sommet minimum t.

La troisième forme du passage, $q = -3b$, donne

$$\varrho = \frac{\sqrt{l^2 + 9b^2}^3}{l^2 + 6b^2};$$

elle est décrite dans la figure par Q_0. Le sommet initial ne peut être qu'un sommet minimum, ce qui ressort d'ailleurs nettement lorsqu'on compare la valeur de ϱ pour $l = 0$ avec la valeur de ϱ pour $l =$ à une très petite grandeur δ.

Nous avons fait, dans l'équation générale des cycloïdales, $R = +\infty$; mais $R = -\infty$ aurait fourni les mêmes résultats, bien que, au point de vue ici adopté, les courbes obtenues eussent dû être regardées comme épicycloïdales. Or, en général, deux cercles générateurs, dont les rayons sont a_1 et a_2, donnent des

courbes cycloïdiques égales ou semblables lorsqu'on a $a_1 + a_2 = b$; il résulte donc, de ce qui précède, que cette propriété reste applicable aux développantes du cercle, lorsque, pour $a_1 = \infty$, on prend $a_2 = -\infty$.

2. $\frac{a}{b} = 2$ (fig. 11). L'équation devient

$$\varrho = \frac{2\sqrt{a^2 + p^2 - 2ap\cos u}^{\,3}}{2a^2 + p^2 - 3ap\cos u}.$$

Le diamètre du cercle des points d'inflexion est $a = 2b$, celui du cercle des sommets est ∞; c'est-à-dire, que les sommets intermédiaires se forment toujours sur la tangente commune au cercle générateur et au cercle directeur.

La formule (28), qui exprime la relation entre p et l'angle u_2 auquel correspond un sommet intermédiaire, devient ici

$$a - p\cos u_2 = 0,$$

d'où

$$\cos u_2 = \frac{a}{p}.$$

Toute valeur de $p > a$ donne donc une valeur réelle pour u_2, en d'autres termes, toute hypocycloïde raccourcie possède un sommet intermédiaire t. Mais tous ces sommets intermédiaires sont déjà formés lorsque $u = \frac{1}{2}\pi$, parce que, pour $u > \frac{1}{2}\pi$, p deviendrait négatif.

Si l'on fait $k = 2$ dans l'équation (29) des hypocycloïdes ordinaires, elle se change en

$$\varrho = \frac{2}{3}\, b \sin\frac{w}{3}.$$

C'est la courbe bien connue, appelée *cardioïde*. Il est à remarquer que la droite des points générateurs a ici pour enveloppe *un point*, attendu que l'hypocycloïde qui est congruente avec cette enveloppe doit avoir, dans le cas actuel, un cercle générateur de rayon $\frac{1}{2}a = b$, et que, pour une hypocycloïde ordinaire dont le cercle générateur et le cercle directeur ont des rayons égaux, l'équation devient

$$\varrho = 0.$$

De cette remarque découle la construction connue de la cardioïde, consistant à mener des sécantes par un point quelconque de la circonférence du cercle, et à porter sur ces sécantes, de chaque côté du point où elles coupent la circonférence pour la seconde fois, le diamètre du cercle.

Ordinairement on regarde la cardioïde comme une *épicycloïde*; le cercle générateur de celle-ci doit alors avoir un rayon égal à $b - a = b - 2b = -b$.

3. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$. Ces hypocycloïdes sont caractérisées par la propriété, ou bien d'avoir à la fois un point d'inflexion et un sommet intermédiaire, ou bien de ne posséder ni l'un ni l'autre de ces points singuliers. Elles forment le passage entre les figures 12 et 13. Pour $p = (2 + \sqrt{3})a$ naît la courbe dans laquelle le sommet initial se confond avec le point d'inflexion, et, en même temps, le sommet intermédiaire avec le sommet terminal.

Des épicycloïdes de même forme sont produites par un cercle générateur dont le rayon est $a' = -\frac{1}{2}b(\sqrt{3} - 1)$.

4. $\frac{a}{b} = 1$. Dans ce cas, on a $\varrho = 0$; le cercle générateur ne peut pas rouler sur le cercle directeur, chaque point reste en place. Le cercle générateur qui engendre des courbes cycloïdiques égales ou semblables a pour rayon $a' = b - a = 0$. Or, si nous faisons dans l'équation générale $a = 0$, il vient $\varrho = p$, c'est-à-dire que chaque point décrit un cercle, sauf quand $p = 0$; cela ne détermine, de nouveau, qu'un point unique. Le théorème des courbes cycloïdiques semblables s'applique donc aussi au cas actuel, à la seule condition de regarder comme figures semblables les points et les cercles. Sous ces points et ces cercles, toutefois, bien que ce soient en apparence les seules formes fournies par le passage en question, se cachent de vraies formes cycloïdiques. Celles-ci se dévoilent lorsque, au lieu de laisser décroître le rayon a' du cercle générateur, on fait croître le rayon b du cercle directeur, ce qui rapproche tout aussi bien $\frac{a'}{b}$ de 0 et $\frac{a}{b}$ de 1. Alors,

en effet, on obtient les *cycloïdes ordinaires*, *allongées* et *raccourcies* (fig. 17), qui sont comprises dans l'équation

$$\varrho = \frac{\sqrt{a^2 + p^2 - 2\,a\,p \cos u}^{\,3}}{p\,(p - a \cos u)};$$

ϱ devient ∞ pour $p = 0$, et pour

$$p - a \cos u_1 = 0.$$

La première équation signifie que le centre du cercle générateur se meut le long d'une droite, la seconde appartient au cercle des points d'inflexion. Pour que u_1 soit réel, il faut qu'on ait

$$p < a,$$

tandis que c'est seulement pour $u_1 < \frac{1}{2}\pi$ que p prend des valeurs positives. Par conséquent, tous les points situés entre le centre du cercle générateur et le point de contact forment une inflexion; tous ces points d'inflexion sont déjà constitués lorsque le cercle générateur a accompli un quart de révolution.

Comme le rayon du cercle des points d'inflexion est égal au demi-rayon du cercle générateur, c'est précisément le cercle des points d'inflexion qui décrit la cycloïde formant l'enveloppe de la droite des points générateurs. Imaginons maintenant que le cercle générateur K (fig. 18) et le cercle des points d'inflexion B roulent simultanément, de manière à toucher toujours au même point la droite directrice; et soit P la position où est arrivé, à un certain moment, le point du cercle générateur qui décrit la cycloïde ordinaire; CP est alors la droite des points générateurs. L'intersection de cette droite avec le cercle des points d'inflexion B est le point générateur qui forme, au moment indiqué, un point d'inflexion. Mais Q est en même temps le pied de la perpendiculaire abaissée sur CP du point de contact A, et en outre le point du cercle des points d'inflexion qui engendre la cycloïde ordinaire à laquelle la droite CP est tangente, attendu qu'on a *angle* PCA $= \frac{1}{2}$ *angle* QmA, et par conséquent *arc* PA $=$ *arc* QA.

De ce qui précède, découlent les propriétés suivantes:

Lorsque deux cercles, dont les rayons sont comme 1 : 2, *roulent*

sur la même ligne droite, de manière à toucher celle-ci toujours au même point, les points générateurs qui décrivent des cycloïdes ordinaires sont toujours situés sur une droite passant par le centre du grand cercle, droite qui alors est tangente à la plus petite cycloïde;

la plus petite cycloïde est le lieu géométrique de tous les points d'inflexion des cycloïdes allongées produites par le grand cercle, et elle touche ces cycloïdes allongées en leurs points d'inflexion.

Dans la fig. 17 sont tracées trois cycloïdes allongées, qui touchent en leurs points d'inflexion b la cycloïde ordinaire décrite par le cercle B. CQ est une des positions de la droite des points générateurs; elle touche la cycloïde ordinaire $A_0\,bbb$, ainsi que la cycloïde allongée $Q_0\,Q\,Q_\pi$, au point Q, lequel est en même temps le point d'inflexion de cette dernière courbe.

L'équation du cercle T des sommets est

$$r - \tfrac{3}{2}\,a \cos\alpha = 0,$$

ou

$$2p^2 - a^2 - ap \cos u_2 = 0;$$

d'où

$$\cos u_2 = \frac{2p^2 - a^2}{ap},$$

et

$$p = \frac{a \cos u_2 \pm a\sqrt{\cos^2 u_2 + 8}}{4}.$$

Le cercle des sommets a donc un diamètre égal à $\frac{3}{2}\,a$, et est situé au même côté de la directrice que le cercle générateur.

u_2 n'est réel que pour

$$\tfrac{1}{2}\,a < p < a,$$

et sera $\lessgtr \frac{1}{2}\,\pi$, suivant qu'on a $p \gtrless \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$. Le point qui se trouve à la distance $\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ de C forme donc un sommet intermédiaire après un quart de révolution.

u_2 n'a pas de valeur limite; dans chaque position du cercle générateur il se produit donc un sommet intermédiaire, mais il ne s'en produit qu'un seul.

Comme $\frac{1}{2}\,a < p < a$ est la condition nécessaire pour obtenir une cycloïde possédant à la fois un point d'inflexion et un sommet intermédiaire, on aura aussi constamment

$$\cos u_1 = \frac{p}{a} > \frac{2p^2 - a^2}{ap} = \cos u_2 ,$$

de sorte que c'est toujours le point d'inflexion b qui se forme le premier, et ensuite le sommet intermédiaire t.

Examinons maintenant encore les sommets initiaux. On trouvera

$$\varrho_0 = \frac{r_0{}^3}{p(p-a)} \text{ et } \left(\frac{d^2\varrho}{du^2}\right)_0 = \frac{a r_0 (2p + a)}{p(p-a)} .$$

Pour $p < a$, c'est-à-dire pour les points situés entre C_0 et A_0, le sommet initial est donc un minimum négatif; pour $p > a$, par conséquent pour toutes les cycloïdes allongées, c'est un minimum positif; — résultats faciles à prévoir.

Les formes de passage sont:

$p = 0$, ce qui donne lieu, comme nous l'avons déjà remarqué, à la description de la ligne droite $P_0 P_\pi$.

$p = \frac{1}{2} a$, c'est-à-dire la courbe $Q_0 Q Q_\pi$, dont l'équation est

$$\varrho = \frac{a\sqrt{5 - 5\cos u}^3}{2(1 - 2\cos u)} .$$

Le point d'inflexion se produit lorsqu'on a $\cos u = \frac{1}{2}$, donc après un sixième de révolution. Le sommet intermédiaire se confond ici avec le sommet terminal.

$p = a$, la cycloïde ordinaire, dont l'équation s'obtient en faisant, dans l'équation (29), $bk = a$ et $k = 1$,

$$\varrho = -4a \sin w.$$

5. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ (fig. 16). Si dans l'équation des hypocycloïdes on pose $b = 2a$, il vient

$$\varrho = \frac{\sqrt{a^2 + p^2 - 2ap\cos u}^3}{p^2 - a^2} .$$

Dans cette expression, l'angle u peut être remplacé par l'angle w. De la relation générale

$$w - v = \alpha - \alpha_0$$

(p. 9) il résulte, en effet, pour les hypocycloïdes allongées,

$$w = v + \alpha,$$

pour les cycloïdes raccourcies,

$$w = v + \alpha - \pi;$$

attendu que pour les premières on a $\alpha_0 = 0$, et pour les secondes $\alpha_0 = \pi$. En général, on a donc

$$\pm \sin w = \sin v \,.\, \cos \alpha + \cos v \,.\, \sin \alpha.$$

Mais $$\cos \alpha = \frac{a - p \cos u}{r} = \frac{a - p \cos u}{\sqrt{a^2 + p^2 - 2\,a\,p \cos u}},$$

et $$\sin \alpha = \frac{p \sin u}{r} = \frac{p \sin u}{\sqrt{a^2 + p^2 - 2\,a\,p \cos u}}.$$

Ces valeurs étant substituées dans le développement de $\pm \sin w$, on obtient après réduction,

$$\pm \sin w = \frac{(p + a) \sin \frac{1}{2} u}{\sqrt{(p - a)^2 + 4\,a\,p \sin^2 \frac{1}{2} u}},$$

d'où $$\sin^2 \tfrac{1}{2} u = \frac{(p - a)^2 \sin^2 w}{(p + a)^2 - 4\,a\,p \sin^2 w}.$$

Il ne reste plus qu'à introduire cette valeur dans la formule de ϱ, après y avoir remplacé $\cos u$ par $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} u$; on trouve ainsi

$$\varrho = \pm \frac{(p + a)^2 (p - a)^2}{\sqrt{(p + a)^2 \cos^2 w + (p - a)^2 \sin^2 w}^3},$$

où le signe supérieur doit être employé pour les hypocycloïdes raccourcies, le signe inférieur pour les hypocycloïdes allongées.

Cette équation doit être l'équation essentielle de l'ellipse, car on sait que toutes les hypocycloïdes engendrées par un cercle dont le rayon est la moitié de celui du cercle directeur, sont des ellipses.

Pour vérifier cette conclusion, nous déduirons l'équation essentielle de l'ellipse de son équation en coordonnées rectangulaires, l'origine de celles-ci étant placée à l'un des sommets. Cette équation est

$$y = \frac{n}{m} \sqrt{2mx - x^2},$$

quand m représente le demi-grand axe et n le demi-petit axe.

Si l'on désigne par w l'angle que la tangente en un point de l'ellipse fait avec la tangente à l'origine, c'est-à-dire avec l'axe des ordonnées, on a

$$\frac{dy}{dx} = cotg\, w.$$

La formule connue du rayon de courbure,

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

devient donc simplement

$$\varrho = \frac{1}{sin^3 w \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

D'un autre côté, l'équation de l'ellipse, différentiée deux fois, donne

$$cotg\, w = \frac{n}{m} \cdot \frac{m - x}{\sqrt{2mx - x^2}},$$

et

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{mn}{\sqrt{2mx - x^2}^3}.$$

Par l'élimination de x et de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ entre les trois dernières équations, on trouve finalement, après réduction,

$$\varrho = \frac{m^2 n^2}{\sqrt{m^2 cos^2 w + n^2 sin^2 w}^3};$$

équation où il suffit de poser $m = p + a$ et $n = p - a$, pour reproduire l'équation de nos hypocycloïdes, trouvée ci-dessus.

Il est naturel de se demander pourquoi ces hypocycloïdes n'ont ni points d'inflexion, ni sommets intermédiaires.

L'explication de ce fait est facile à donner. Les diamètres du

cercle des points d'inflexion et du cercle des sommets deviennent, pour $b = 2a$,

$$\frac{ab}{b-a} = 2a \text{ et } \frac{3ab}{2b-a} = 2a,$$

c'est-à-dire, égaux tous les deux au diamètre du cercle générateur. Mais celui-ci coupe toujours la droite des points générateurs au point pour lequel $p = a$, c'est-à-dire au point qui décrit l'hypocycloïde *ordinaire*. Celle-ci doit donc, en chacun de ses points, former à la fois une inflexion et un sommet; autrement dit, en chaque point son rayon de courbure doit être infiniment grand. Effectivement, on sait que cette hypocycloïde ordinaire est une *ligne droite*. L'équation (29) donne d'ailleurs aussi, pour $k = \frac{1}{2}$,

$$\varrho = \infty.$$

La droite des points générateurs a pour enveloppe l'hypocycloïde pour laquelle on a $k = \frac{1}{4}$ ou $= \frac{3}{4}$; l'équation de cette courbe est donc

$$\varrho = -\tfrac{3}{2}\, b \sin 2w.$$

---

12. Tableau des différentes formes des courbes cycloïdiques.

Pour finir, nous donnerons un aperçu général des différentes formes dont il a été question dans ce qui précède. Nous nous attacherons surtout à montrer comment chacune de ces formes se transforme en une autre, et à cet effet nous ferons varier le rapport $a : b$ de $+\infty$, en passant par $1 : \infty$, jusqu'à $-\infty$.

1. $\frac{a}{b} = \infty$. *Développantes du cercle* (fig. 9). Les points géné-

rateurs situés au-dessous de A_0 forment des développantes de cercle *allongées*, avec un sommet minimum positif pour sommet initial. Ce sommet est plus petit à mesure que le point générateur est placé plus haut, et il se transforme en un point de rebroussement quand le point générateur se trouve en A_0 et décrit par conséquent la développante *ordinaire* du cercle. Les points situés entre A_0 et P_0 donnent des développantes *raccourcies* du cercle, avec deux sommets et un point d'inflexion, à savoir: 1°. un *sommet minimum négatif*, qui devient de plus en plus grand; 2°. un *point d'inflexion*, qui d'abord s'éloigne d'autant plus de ce sommet initial que le point générateur est placé plus haut, mais qui ensuite se rapproche de nouveau de ce sommet, pour se confondre enfin avec lui en un sommet maximum à rayon infini; 3°. un *sommet minimum positif*, qui s'éloigne de plus en plus du point d'inflexion.

Vient maintenant la partie $P_0 Q_0$, où se trouvent les points qui engendrent des développantes de cercle raccourcies, à deux sommets, mais sans point d'inflexion. Le *sommet initial* a changé de signe en traversant ∞; il est donc devenu positif et, en outre, sommet maximum. Le sommet intermédiaire est resté sommet minimum. La distance de ces deux sommets continue encore quelque temps à augmenter, mais ensuite ils se rapprochent de nouveau assez rapidement l'un de l'autre; le premier croît, le second décroît, et finalement ils se confondent, au point Q_0, en un sommet minimum positif.

Les points situés au-dessus de Q_0 donnent naissance à des développantes de cercle raccourcies n'ayant qu'un *sommet initial*, lequel est un sommet minimum positif, d'autant plus grand que le point générateur se trouve plus haut.

Si, pour chaque position de la courbe génératrice K, on détermine les intersections de la droite des points générateurs avec le cercle des points d'inflexion et avec le cercle des sommets, on obtient les lieux géométriques de tous les points d'inflexion et de tous les sommets intermédiaires. Ces lieux géométriques sont indiqués, dans cette figure comme dans les autres, par des

lignes pointillées. A cause du contour piriforme qu'ils affectent souvent, nous les appellerons, pour abréger, des *poires*. Dans la fig. 9, la *poire des sommets intermédiaires* a un beaucoup plus grand ventre que la *poire des points d'inflexion*.

2. $\infty < \frac{a}{b} > 2$. *Hypocycloïdes extérieures*, à cercle des sommets situé en dehors. Figure 10. Tandis que dans les développantes du cercle, à partir du sommet initial ou à partir du sommet intermédiaire quand celui-ci existe, le rayon de courbure croît indéfiniment, dans les courbes cycloïdiques actuelles et dans toutes les suivantes il se forme en outre un *sommet terminal*, lorsque le cercle générateur a accompli une demi-révolution. Ce sommet terminal est toujours un maximum positif. Son existence constitue la différence caractéristique entre ces hypocycloïdes et les développantes du cercle; les sommets initiaux, les points d'inflexion et les sommets intermédiaires présentent, chez toutes ces courbes, les mêmes variétés. Mais, tandis que pour les développantes du cercle le diamètre du cercle des points d'inflexion était toujours égal à *une* fois et celui du cercle des sommets toujours égal à *trois* fois le rayon du cercle directeur, ces diamètres deviennent maintenant plus grands et croissent à mesure que le cercle générateur devient plus petit. Le diamètre du cercle des points d'inflexion approche de celui du cercle directeur; le diamètre du cercle des sommets croît indéfiniment. En même temps, les poires des points d'inflexion et des sommets intermédiaires changent de forme. Elles s'allongent les unes et les autres. Seulement, tandis que l'angle de révolution pour lequel se forme le point d'inflexion le plus éloigné reste toujours plus petit que $arc\,sin\,\frac{1}{3} = 19° 15'$ environ, la limite vers laquelle tend l'angle de révolution qui fournit le dernier sommet intermédiaire est 90°. La poire des sommets intermédiaires se dilate donc *indéfiniment*, tant en longueur qu'en largeur

3. $\frac{a}{b} = 2$. *Courbes cardioïdes*. Figure 11. Le diamètre du cercle des points d'inflexion et celui du cercle des sommets ont atteint

les limites indiquées ci-dessus. Le premier est devenu égal au diamètre du cercle directeur, sans que la poire des points d'inflexion ait subi pour cela un changement de forme bien marqué. Quant au cercle des sommets, il se change en ligne droite, et par suite la poire des sommets intermédiaires reste ouverte. Il y a, en effet, à mesure que le cercle générateur se rétrécit, un plus grand nombre de points qui sont mis en état de former un sommet intermédiaire, et, à la limite actuelle, cette propriété est acquise à *tous* les points qui engendrent des cardioïdes raccourcies. La poire des sommets intermédiaires devient en conséquence une courbe qui se rapproche asymptotiquement de la direction de la tangente commune à l'origine du mouvement; car la valeur limite de l'angle de révolution u, pour laquelle se forme le dernier sommet intermédiaire, est 90°; et lorsque le cercle générateur a effectué le quart d'une révolution, la tangente commune est parallèle à sa direction primitive et, en même temps, à la droite des points générateurs.

Toutes les cardioïdes raccourcies ont donc un *sommet initial*, un *sommet intermédiaire* et un *sommet terminal*.

4. $2 > \frac{a}{b} > 1$. *Hypocycloïdes extérieures*, à cercle des sommets situé en dedans. Figures 12 et 13. La poire des sommets intermédiaires se courbe maintenant en dessous, ce qui a pour conséquence que dans l'hypocycloïde $Q_0\,Q\,Q_\pi$ le sommet intermédiaire, au lieu de se réunir avec le sommet initial Q_0, se confond en un sommet minimum avec le sommet terminal Q_π. Les hypocycloïdes raccourcies, qui n'ont ni point d'inflexion ni sommet intermédiaire, conservent donc un sommet maximum pour sommet initial, et acquièrent un sommet minimum pour sommet terminal, en opposition avec les figures 9 et 10, où c'était justement le contraire.

Pendant que le rayon du cercle générateur se rapproche de celui du cercle directeur, le cercle des sommets se resserre, bien que son diamètre reste toujours plus grand que trois fois le rayon du cercle générateur. La poire des sommets intermédiaires

devient donc, jusqu'à une certaine limite, de plus en plus courte.

Quant au diamètre du cercle des points d'inflexion, il continue à croître, et cela sans limites. La poire des points d'inflexion s'allonge par suite indéfiniment.

Si l'on suit l'allongement de la poire des points d'inflexion et le raccourcissement de la poire des sommets intermédiaires, pendant que le rayon du cercle générateur décroît de $2b$ à b, on reconnaît qu'au commencement (fig. 12) l'hypocycloïde $P_0 P P_\pi$, dans laquelle le point d'inflexion se confond avec le sommet initial, est encore toujours située en dedans de l'hypocycloïde $Q_0 Q Q_\pi$, dans laquelle le sommet intermédiaire se réunit avec le sommet terminal, bien que la bande comprise entre les deux courbes se rétrécisse de plus en plus. Lorsque a est devenu à peu près $= 1\frac{4}{11}$, cette bande disparaît; le point d'inflexion et le sommet intermédiaire s'évanouissent simultanément. A partir de ce moment (fig. 13), P_0 est situé *au-dessus* de Q_0; il ne se forme plus d'hypocycloïdes à sommet intermédiaire et sans point d'inflexion, mais bien des hypocycloïdes sans sommet intermédiaire et à point d'inflexion.

5. $\frac{a}{b} = 1$. Le passage des hypocycloïdes extérieures aux hypocycloïdes intérieures est accompagné de changements remarquables. Ces changements sont faciles à prévoir, quand on réfléchit qu'ils proviennent tous de la même cause. Il suffit de se rappeler que l'angle décrit par la droite des points générateurs, depuis l'origine du mouvement jusqu'à une position déterminée du cercle générateur, est égal à l'arc v parcouru sur le cercle directeur par le point de contact, diminué de l'angle de rotation u du cercle générateur. Pour $u = \pi$, cet angle est donc

$$\frac{a-b}{b}\pi,$$

parce qu'on a généralement $v = \frac{a}{b}u$. Pendant que a décroît de ∞ à b, l'angle formé par la droite sur laquelle sont situés tous

les sommets terminaux et la droite sur laquelle se trouvent tous les sommets initiaux, devient de plus en plus petit. Mais entre ces deux droites ($C_0 P_0$ et $C_\pi P_\pi$ dans les fig. 12 et 13) sont comprises aussi bien les hypocycloïdes elles-mêmes, que les poires des points d'inflexion et des sommets intermédiaires. Celles-ci diminuent donc continuellement de largeur.

Le passage des hypocycloïdes extérieures aux hypocycloïdes intérieures consiste maintenant en ceci. La vitesse de révolution de la droite des points générateurs diminue à mesure que le rayon du cercle générateur approche de celui du cercle directeur; au moment où les deux rayons sont égaux, cette vitesse est *nulle*; quand le rayon du cercle générateur devient plus petit que celui du cercle directeur, la droite des points générateurs se met à tourner en sens opposé. Mais, au moment où les points générateurs n'ont aucun mouvement, il ne se décrit pas non plus d'hypocycloïdes; la ligne des sommets terminaux et les poires des points d'inflexion et des sommets intermédiaires viennent coïncider avec la ligne des sommets initiaux, pour reparaître ensuite à l'autre côté de cette dernière.

6. $1 > \frac{a}{b} > \frac{1}{2}$. *Hypocycloïdes intérieures*, dont le cercle des points d'inflexion et le cercle des sommets sont plus grands que le cercle générateur. Figures 14 et 15*a*. Dans le passage analysé en dernier lieu, le diamètre du cercle des points d'inflexion a en même temps changé de signe à travers l'infini, ainsi que l'avait fait antérieurement le diamètre du cercle des sommets. A partir de ce moment, le point d'inflexion se résout donc dans le sommet terminal, au lieu de se confondre avec le sommet initial. En conséquence, toutes les hypocycloïdes commencent maintenant par un *sommet minimum positif*. Le cercle des points d'inflexion, et avec lui la poire des points d'inflexion, diminue d'ampleur, mais reste pourtant toujours plus grand que le cercle des sommets, dont le diamètre est d'emblée inférieur à $1\frac{1}{2}$ fois le rayon du cercle directeur.

En s'élevant donc, à partir de A_0, le long de la droite des

points générateurs, on rencontre d'abord des points qui, après le sommet initial, forment un point d'inflexion, puis un *sommet minimum négatif* et enfin un *sommet maximum positif*. Mais bientôt ces deux sommets se confondent, au point Q_n, en un *sommet minimum négatif*, de sorte que les points situés au-dessus de Q_0 ne fournissent plus qu'un *point d'inflexion*. Enfin, le point d'inflexion se réunit aussi, au point P_n, avec le même sommet terminal, en formant un *sommet maximum positif* à rayon infiniment grand; toutes les hypocycloïdes raccourcies suivantes n'ont plus qu'un sommet initial et un sommet terminal.

Le diamètre du cercle des points d'inflexion et celui du cercle des sommets se rapprochent tous les deux, comme limite, du rayon du cercle directeur, ou, ce qui est la même chose, du diamètre du cercle générateur; ils pourront donc tous les deux, et successivement, pénétrer dans le cercle directeur: d'abord le cercle des sommets, pour $a = \frac{4}{5} b$ (fig. 14), puis le cercle des points d'inflexion, pour $a = \frac{2}{3} b$ (fig. 15*a*). Corrélativement, les poires des points d'inflexion et des sommets intermédiaires se resserrent de plus en plus autour du cercle directeur; dans la fig. 14, la poire des sommets intermédiaires est venue se confondre avec le cercle directeur, à l'intérieur duquel elle continuera ensuite à se contracter; dans la fig. 15*a*, le même passage a lieu pour le cercle des points d'inflexion.

7. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. *Ellipses*. Figure 16. La distance entre les sommets intermédiaires et les points d'inflexion est devenue graduellement plus petite, et concurremment le faisceau des hypocycloïdes qui possèdent ces points s'est rétréci, jusqu'à ce que, pour $a = \frac{1}{2} b$, les sommets intermédiaires coïncident avec les points d'inflexion, et que l'hypocycloïde *ordinaire* reste seule en possession de ces points, qui la transforment, toutefois, en ligne droite. Toutes les autres hypocycloïdes n'ont qu'un sommet initial et un sommet terminal, et prennent la forme d'ellipse.

8. $\frac{1}{2} > \frac{a}{b} > 0$. *Hypocycloïdes intérieures*, dont le cercle des

points d'inflexion et le cercle des sommets sont plus petits que le cercle générateur. Figure 15*a*. Ces hypocycloïdes fournissent les mêmes formes que les hypocycloïdes intérieures dont les cercles des points d'inflexion et le cercle des sommets sont plus grands que le cercle générateur b, car, pendant que a décroît de $\frac{1}{2}b$ à 0, $b-a$ croît de $\frac{1}{2}b$ à b.

Représentons-nous maintenant que, sur le même cercle directeur K' (fig. 15*a* et *b*), roulent deux cercles générateurs K, dont les rayons sont a et $a' = b - a$; nous savons qu'alors deux points générateurs, pour engendrer des courbes semblables, comme le font les points P_0, Q_0, R_0 dans les deux figures, doivent satisfaire à la condition

$$p\,p' = a\,a',$$

p et p' étant les distances des points générateurs aux centres des cercles générateurs respectifs. Ainsi, pendant que p, partant de 0 et passant par les valeurs a, $\frac{a(a+b}{2b-a}$, $\frac{a^2}{b-a}$, croît jusqu'à ∞, p' décroît de ∞ à 0, en passant par a', $\frac{a'(a'+b)}{2b-a'}$, $\frac{a'^2}{b-a'}$. Il résulte de là que, à partir du moment où le rayon du cercle générateur est devenu plus petit que la moitié du rayon du cercle directeur, il n'y a plus que les hypocycloïdes *allongées* qui puissent avoir des points d'inflexion et des sommets intermédiaires, tandis que, jusqu'ici, ces points singuliers ne pouvaient se présenter que dans les hypocycloïdes raccourcies. C'est une suite de la circonstance que le cercle des points d'inflexion et celui des sommets ont pénétré à l'intérieur du cercle directeur. Le diamètre de chacun de ces deux cercles se rapproche de 0, et les poires des points d'inflexion et des sommets se resserrent de plus en plus. A cet égard il faut remarquer, toutefois, qu'après le passage $a = \frac{1}{2}b$ le diamètre du cercle des points d'inflexion est plus petit que celui du cercle des sommets; de sorte que, dans la fig. 15*a*, la poire des points d'inflexion tombe de nouveau en dehors de celle des sommets

intermédiaires, comme dans les figures précédentes, mais à l'autre côté de la droite C_0 A. Un point générateur, situé entre P_0 et Q_0 dans la fig. 15*a*, rencontre d'abord la poire des points d'inflexion et ensuite la poire des sommets intermédiaires; et, effectivement, il forme d'abord son point d'inflexion, puis son sommet intermédiaire. Tout à l'inverse, un point générateur, situé entre P_0 et Q_0 dans la fig. 15*b*, rencontre d'abord la poire des sommets intermédiaires et ensuite la poire des points d'inflexion. Néanmoins, ce point devra encore, comme le premier, former son point d'inflexion avant son sommet, attendu que la similitude des deux courbes l'exige. Effectivement, les choses se passent ainsi; car, après la rencontre avec la poire des points d'inflexion, le point coupe de nouveau la poire des sommets intermédiaires, et ce n'est qu'à cette seconde rencontre que se forme le sommet intermédiaire; la première n'est qu'une intersection accidentelle de la poire des sommets intermédiaires avec l'hypocycloïde.

9. $\frac{a}{b} = \frac{1}{\infty}$. *Cycloïdes.* Figure 17. Pendant que a approche de 0, le diamètre du cercle des points d'inflexion et celui du cercle des sommets décroissent continuellement, le premier d'abord plus vite que le second, mais plus tard moins vite, de sorte qu'ils deviennent ensemble 0, au moment où $a = 0$. Ceci suppose toutefois que b reste fini. Si on laisse a constant et qu'on fasse croître b indéfiniment, les mêmes diamètres tendent vers a et $\frac{3}{2}a$. Ces limites étant atteintes, chaque cycloïde allongée coupera d'abord la poire des sommets intermédiaires, mais sans former de sommet; ensuite elle touchera la poire des points d'inflexion (qui est ici elle-même une cycloïde) en son point d'inflexion; après cela, les cycloïdes dont l'allongement est moindre que la moitié du rayon du cercle générateur seront les seules qui couperont une seconde fois la poire des sommets intermédiaires et qui formeront un sommet intermédiaire au point d'intersection.

10. $\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b} < 0$. *Epicycloïdes.* Comme celles-ci sont sembla-

bles aux hypocycloïdes extérieures, nous pouvons nous borner à quelques remarques générales.

Et d'abord, la direction positive de la droite des points générateurs va, ici encore, du centre du cercle générateur vers le point de contact avec le cercle directeur, de sorte que nous considérons seulement les épicycloïdes dont les points générateurs, dans une figure analogue aux fig. 9 à 17, se trouvent au-dessous du centre du cercle générateur. Supposons maintenant, de nouveau, que sur un même cercle directeur roulent deux cercles, l'un intérieur, à rayon $a > b$, l'autre extérieur, à rayon $a' = a - b$; et soient p et p' les distances de deux points générateurs P et P′ aux centres des cercles avec lesquels ils se meuvent; les courbes cycloïdiques décrites seront alors semblables si l'on a

$$p\,p' = a\,a'.$$

Pendant que p croît de 0, en passant par a, $\frac{a^2}{a-b}$ et $\pm\frac{a(a+b)}{a-2b}$, jusqu'à ∞, p' décroîtra de ∞, en passant par a', $\frac{a'^2}{a+b}$ et $\pm\frac{a'(a'-b)}{a'+2b}$, jusqu'à 0; en d'autres termes, pendant que P parcourt la distance du centre du cercle générateur intérieur jusqu'au point de contact, P′, partant de l'infini, s'élève avec tant de vitesse le long de la droite des points générateurs, qu'il arrive en même temps que P au point de contact. Ensuite, c'est le contraire qui a lieu: P devance P′, et disparaît à l'infini au moment où P′ atteint le centre du cercle générateur extérieur. Ici également, les *épicycloïdes allongées* sont donc semblables aux *hypocycloïdes raccourcies*, et réciproquement.

Le diamètre du cercle des points d'inflexion et celui du cercle des sommets sont égaux à

$$\frac{a'b}{a'+b} \text{ et } \frac{3\,a'b}{a'+2\,b},$$

et se trouvent toujours au même côté du cercle directeur que le cercle générateur.

Toujours on a

$$\frac{a'b}{a'+b} < a',$$

c'est-à-dire, qu'on peut toujours mener du centre du cercle générateur une tangente au cercle des points d'inflexion, et que la direction positive de la droite des points générateurs coupe en général deux fois le cercle des points d'inflexion. De même que dans les hypocycloïdes extérieures, il y a donc toujours deux points générateurs qui forment au même instant un point d'inflexion.

Pour le second diamètre on a, au contraire,

$$\frac{3\,a'b}{a'+2\,b} \gtrless a',$$

suivant que

$$a' \lessgtr b.$$

Tant que a' reste $< b$, la poire des sommets intermédiaires conserve donc la forme qu'elle présente chez les hypocycloïdes pour lesquelles on a $a < 2b$. Pour $a' = b$, ce sont les courbes cardioïdes qui prennent naissance; le diamètre du cercle des sommets devient alors égal au rayon du cercle générateur. Pour $a' > b$, la poire des sommets reprend aussi sa forme ordinaire et primitive. Le diamètre du cercle des points d'inflexion tend vers b, et celui du cercle des sommets vers $3b$, lorsque a' augmente; ils atteignent ces limites pour $a' = \infty$, point où l'on est ramené à la fig. 9.

SUR

LE MICROPHONE,

PAR

P. L. RIJKE.

---

§. 1. C'est par le *Feuilleton scientifique du Journal des Débats* que j'eus pour la première fois connaissance de l'appareil inventé par M. Hughes, à Londres, et qui devait être pour l'oreille ce que le microscope est pour l'œil; cet appareil, en effet, prenant dans un couple téléphonique la place du téléphone transmetteur, ou téléphone A, devait transmettre le son au téléphone récepteur, ou téléphone B, non plus avec une intensité affaiblie, comme c'était le cas jusqu'à présent, mais au contraire avec une amplification considérable. Comme l'appareil me paraissait décrit assez exactement dans l'article cité, je résolus d'en faire construire une copie. Mais les résultats que j'obtins ne me satisfirent pas complétement. Entre autres, on n'était jamais sûr d'avance de la réussite des expériences; toujours il fallait quelques tâtonnements avant que l'appareil répondit même à des exigences modérées. Il en fut de même d'autres modèles, construits d'après des communications que je trouvai, deux ou trois jours plus tard, dans le journal anglais *Nature*. Les difficultés auxquelles je m'étais heurté, — par ma faute probablement, — me déterminèrent à chercher ma voie propre, et c'est ainsi que, passant avec mon assistant, le Dr. Figée, d'une disposition à l'autre, nous sommes

enfin arrivés à celle que je vais décrire et qui nous a donné les résultats les plus satisfaisants.

L'appareil consiste simplement en une de ces boîtes de carton dans lesquelles les pharmaciens délivrent les médicaments pulvérulents. La boîte dont je me suis servi (Pl. IV, fig. 1) avait un diamètre de 10 cm. et environ 4 cm. de hauteur. Le couvercle en était enlevé, et par le fond, tourné en-dessus, passaient — à environ 3 cm. l'un de l'autre — deux fils très minces de cuivre rouge, dont les bouts extérieurs *ab* et *cd* étaient roulés en spirale, tandis que chacune des deux autres extrémités était reliée à l'une des vis de serrage *ef* et *gh* adaptées à la paroi latérale de la boîte. Dans les spirales de cuivre étaient introduits deux morceaux de coke *lm* et *np*, taillés en forme de cylindres d'environ 25 mm. de longueur et 5 mm. d'épaisseur, et sur lesquels reposait un parallélipipède rectangulaire *qs*, également en coke, qui avait 70 mm. de long, 7 mm. de large et autant de haut. Sur la boîte, enfin, était posé un poids en plomb *i*, pesant à peu près 500 grammes, qui était destiné d'une part à donner de la fermeté à l'appareil, et d'autre part à étouffer les tons propres du carton.

Si maintenant l'une des électrodes d'un appareil galvanique — qui dans mes expériences se composait ordinairement de trois éléments Leclanché — est reliée à la vis de serrage *ef*, et que la seconde électrode soit en communication avec l'une des extrémités d'un fil téléphonique, dont l'autre extrémité est serrée dans la vis *gh*, on aura, à chaque mouvement ascendant ou descendant de la partie supérieure de notre appareil, un mouvement alternatif de la petite plaque en fer du téléphone. En effet, lorsque la face en question s'élève, la pression entre les cylindres de coke et le parallélipipède *qs* devient plus forte. Il en résulte une diminution de la résistance du circuit, par conséquent un accroissement de l'intensité du courant, et il est clair que la modification ainsi produite dans le champ magnétique du téléphone doit avoir pour conséquence le déplacement de la plaque de fer. Il est non moins évident que, lorsque la face supérieure de l'appareil s'abaisse, la plaque doit se mouvoir en sens opposé,

et que par conséquent, si l'appareil est frappé par des ondes sonores, les mouvements vibratoires qui y sont excités se transmettront, de la manière indiquée, au téléphone.

Cet appareil est assez sensible pour que des paroles prononcées le dos tourné vers lui, — mais alors d'une voix un peu élevée, — soient distinctement entendues et comprises près du téléphone placé à grande distance. Il est à remarquer aussi que, si l'on introduit dans le circuit quatre téléphones au lieu d'un, les mots articulés continuent à être perçus avec la même netteté même lorsque le nombre des éléments voltaïques n'a pas varié.

§ 2. J'ai supposé qu'un courant électrique, en passant d'un morceau de coke à un autre qui est en contact avec lui, éprouve dans ce passage une résistance de nature spéciale. En effet, les surfaces qui se touchent ne sont pas parfaitement unies, ne constituent pas des plans géométriques. Quelque soin qu'on ait mis à les travailler, il y reste toujours des inégalités, des éminences et des dépressions, peut-on dire. Or, les sections transversales de ces inégalités, par lesquelles le courant s'écoule, ayant une étendue relativement petite, il est clair que la résistance peut y être assez considérable. Quant à la diminution que cette résistance éprouve lorsque les morceaux de coke sont pressés avec plus de force l'un contre l'autre, on peut la regarder comme due à ce que les éminences de l'un des morceaux pénètrent alors plus profondément dans les dépressions de l'autre, — car un certain degré de flexibilité, si faible qu'il soit, ne saurait être refusé au coke, — d'où résultera nécessairement un accroissement du nombre des inégalités qui livrent passage au courant. Il va sans dire qu'un effet contraire sera produit par une diminution de pression.

§ 3. Il m'a paru intéressant de connaître la valeur de cette résistance dans des conditions déterminées, et de savoir comment elle est modifiée lorsque la pression varie. Les recherches suivantes ont été entreprises pour résoudre cette question.

J'ai commencé par déterminer le pouvoir conducteur du coke qui devait servir à mes expériences. A cet effet, dans un

morceau de cette substance qui était destiné à un élément de Bunsen, j'ai fait scier un parallélipipède, sur lequel j'ai tracé, à 50 millim. l'une de l'autre, deux marques *ab* et *cd* (fig. 2). J'ai ensuite mesuré la largeur et l'épaisseur du parallélipipède en *ab* et en *cd*, et aussi en *mn*, au milieu de l'intervalle entre *ab* et *cd*. Voici les résultats obtenus:

	en *ab*.	en *mn*.	en *cd*.	moyenne.
épaisseur . . .	$10^{mm},8$	$10^{mm},9$	$10^{mm},7$	$10^{mm},8$
largeur.	10 ,7	10 ,75	10 ,5	10 ,56

Les expériences de conductibilité ont été faites au moyen d'un pont de Wheatstone ABCD (fig. 3), dont les points A et C étaient reliés aux électrodes d'un élément de Bunsen, et les deux autres points, B et D, aux extrémités du fil d'un multiplicateur très sensible de Thomson. La branche BC a toujours consisté en une bobine d'une résistance égale à 1 ohm, tandis que la résistance de la branche AB, suivant le degré d'exactitude qu'on désirait atteindre, était portée à 10, 100, 1000 ou 2000 ohms. Le corps dont on voulait mesurer la résistance étant intercalé dans la branche CD, et la résistance de la branche AD étant augmentée ou diminuée successivement par ohms *entiers*, la détermination se faisait avec une exactitude de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ou $\frac{1}{2000}$ d'ohm.

Les bobines de résistance que j'ai employées étaient toutes en argentane et provenaient des Frères Elliott, à Londres.

J'ai d'abord enroulé autour du parallélipipède, en *ab* et en *cd*, trois tours d'un fil de cuivre rouge épais de $0^{mm},2$, puis ces fils ont été reliés à deux conducteurs serrés en D et en C et dont la résistance combinée avait été trouvée égale à 0,032 ohm par une expérience préalable. Ayant ensuite déterminé la résistance totale de la branche CD, j'ai obtenu 0,172 ohm, d'où il suivrait que la résistance d'une portion de mon parallélipipède de coke longue de 50 mm. était égale à

0,140 ohm.

Les deux mesures ont eu lieu à la température de 22°,6 C.

Le chiffre élevé de 0,140 ohm pouvait difficilement être exact,

et selon toute apparence l'erreur devait provenir de ce que je n'avais pas tenu compte de la résistance au passage entre le cuivre et le coke. Pour acquérir la certitude à cet égard, j'ai procédé de la manière suivante. Par-dessus le parallélipipède a été glissé, jusqu'à la marque *ab*, un bouchon percé *efgh* (fig. 4), qu'on a ensuite enfoncé dans la partie inférieure d'un manchon en bois *iklm*. Après avoir convenablement fixé ce manchon et l'avoir rempli de mercure, on a placé au-dessous un vase en fer A, dans lequel a été versé du mercure jusqu'au trait *cd*.

Les conducteurs en cuivre, serrés en C et D (fig. 3), ayant alors été mis en communication l'un avec le mercure du manchon, l'autre avec le mercure du vase A, j'ai mesuré la résistance entre C et D, pour laquelle j'ai obtenu, à 22°,6, la valeur 0,0545 ohm. Comme la résistance des conducteurs en question fut trouvée égale à 0,028 ohm, il en résulte que la résistance cherchée devait être de

0,0265 ohm,

et par conséquent beaucoup plus faible — environ 5 fois — que la valeur obtenue précédemment [1]).

§ 4. Pour les expériences que j'avais proprement en vue, j'ai fait scier le parallélipipède en deux parties égales, dont les nouvelles faces de section ont été usées et aplanies autant que possible; on y a aussi tracé deux nouvelles marques *ab* et *cd*, qui, lorsque les deux morceaux étaient pressés l'un contre l'autre, avaient entre elles un écartement de 50 mm.

Le morceau de coke supérieur fut adapté, de la manière indiquée ci-dessus, dans le manchon de bois, tandis que l'autre morceau fut solidement fixé, également au moyen d'un bouchon de liége *npqr*, dans le vase A (fig. 5). Ce dernier bouchon était pourvu d'une ouverture *o*, par laquelle on versait le mercure, qui remplissait le vase jusqu'au trait *cd*.

---

[1]) On aurait pu faire les corrections ordinaires pour la température etc., et les mesures auraient aussi pu être en général plus rigoureuses. La suite montrera, toutefois, combien aurait été mal employé le temps consacré à obtenir ces minces avantages.

Le manchon de bois rempli de mercure était suspendu, à l'aide de trois fils, au plateau gauche d'une balance hydrostatique. Dans la paroi latérale de ce manchon était percé un trou *s*, par lequel passait un fil de cuivre *uv*, dont l'extrémité *v* plongeait dans le mercure du vase B lorsque l'aiguille de la balance se trouvait sur zéro. Directement en face du trou *s* on voit la vis *wx*, sur laquelle se mouvait le masse *y*. On pouvait donc déplacer un peu le centre de gravité du manchon avec ses accessoires, et donner ainsi aux arêtes du parallélipipède la direction verticale nécessaire. Après qu'on avait ramené l'aiguille de la balance à zéro, en chargeant convenablement le plateau de droite, le vase A, qui reposait sur une petite table à vis calantes, était exhaussé jusqu'à ce que la face supérieure du morceau de coke fixé dans ce vase vînt toucher la face inférieure du coke fixé dans le manchon de bois. Bien entendu qu'on avait soin de maintenir ces deux faces constamment parallèles l'une à l'autre.

Il est maintenant facile de comprendre comment l'expérience était conduite. Quand on voulait déterminer la résistance au passage sous une pression de *n* grammes, on n'avait qu'à diminuer de ce nombre de grammes les contre-poids placés sur le plateau droit de la balance, à introduire dans le vase A, par l'ouverture *o*, l'extrémité d'un fil de cuivre dont l'autre bout était serré en D (fig. 3), à relier semblablement le vase B au point C du pont de Wheatstone, et à mesurer alors la résistance de la branche CD. On obtenait ainsi les données nécessaires pour calculer la résistance au passage. Il va sans dire, toutefois, qu'on devait préalablement connaître la résistance de ce qui, en dehors du coke, se trouvait dans la branche CD. A cet effet, le vase B étant relié au point C (fig. 3), j'ai plongé dans le mercure du manchon de bois l'extrémité libre du fil qui partait du point D, puis j'ai mesuré la résistance de la branche CD. Je l'ai trouvée, à 19°, égale à

0,0985 ohm.

Comme la résistance de 50 mm. de coke s'élève à

0,0265 ohm,

on voit que, de chaque résistance trouvée pour la branche AD (fig. 3), il faut déduire

0,125 ohm

pour obtenir la valeur cherchée de la résistance au passage.

§ 5. Lorsqu'une mesure a été exécutée, et qu'on la répète sous des conditions en apparence identiques, il s'en faut de beaucoup qu'on retrouve toujours les mêmes résultats. Au contraire, ces résultats peuvent différer considérablement, à tel point même que toute tentative ayant pour but d'en déduire quelque loi peut sembler désespérée. Je ne me suis pourtant pas laisser décourager pas ces fortes discordances; elles m'ont seulement conduit à augmenter beaucoup le nombre des mesures. Au reste, j'étais bien un peu préparé aux grandes différences que je constatais. Avant chaque mesure, en effet, j'abaissais légèrement à la main le plateau droit de la balance, pour séparer un instant le morceau de coke supérieur du morceau inférieur, sur lequel je le laissais ensuite redescendre doucement. Or, dans cette manœuvre, quel que soit le soin qu'on y apporte, les mêmes inégalités (§ 2) de l'un des morceaux ne viendront pas toujours se remettre en contact avec les mêmes inégalités de l'autre; de là doivent naître des différences, cela va sans dire.

§ 6. Un autre fait m'a surpris davantage. Lorsque l'écart, à gauche par exemple, de l'image projetée par le galvanomètre me faisait conclure que la résistance de la branche AD était trop faible, et que pour cette raison j'ajoutais un peu de résistance, mais d'abord en excès, de sorte que l'image se portait du côté opposé, ce qui m'obligeait à diminuer de nouveau la résistance, — dans ce cas, dis-je, il arrivait assez souvent que je pouvais revenir peu à peu jusqu'à la résistance initiale sans que l'image cessât de s'écarter à droite. Ce phénomène doit-il être expliqué en admettant que les deux morceaux de coke forment une espèce de téléphone et que, vibrant sous l'influence de tout son qui se produit à l'intérieur ou dans le voisinage de la chambre, ils peuvent se déplacer l'un par rapport à l'autre? Ce qui semble plaider en faveur de cette hypothèse, c'est la circonstance que

le phénomène s'observait surtout lorsqu'on marchait bruyamment à proximité de l'appareil. Quoi qu'il en soit, lorsque pour une même résistance on avait trouvé tant un écart à droite qu'un écart à gauche, cette résistance était regardée comme une valeur moyenne et inscrite comme telle dans les tableaux.

§ 7. Ci-dessous sont réunis tous les résultats que j'ai obtenus. Ils sont communiqués *in extenso*, précisément à cause des grandes différences qu'ils présentent entre eux.

On trouve dans la colonne (*a*) des tableaux le numéro de la série, dans la colonne (*b*) le nombre qui indique combien de fois la résistance de A B (fig. 3) est plus grande que celle de B C, dans la colonne (*c*) le nombre d'ohms introduits dans A D, dans la colonne (*d*) la position de l'image. Les lettres D et G font connaître si l'image se trouvait à droite ou à gauche du point d'équilibre, tandis que la lettre O indique que l'image coïncidait à peu près avec ce point d'équilibre.

TABLEAU I.

Pression = 0,25 gr. Température = 19°,1.				Pression = 0,5 gr. Température = 19°,1.				Pression = 1 gr. Température = 19°,1.				Pression = 2 gr. Température = 18°,6.			
(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)
I	100	1990	G	I	100	5000	D	I	100	2000	D	I	1000	7500	G
		2000	G			2000	D			1000	D			8000	G
		4000	D			1000	G			500	G			9000	G
		3000	D			1500	D			700	G			9500	D
		2500	D			1200	G			800	G			9200	D
		2400	G			1400	D			850	D			9100	G
		2450	G			1300	D			820	D			9150	D
		2470	G			1250	D			810	D				
		2490	G			1220	D			805	D	II		9150	D
		2495	O			1210	D			800	G			8000	D
						1235	O			802	D			7000	D
II		2495	G							801	O			5000	D
		2500	G	II		1205	G							2000	G
		2700	D			2000	D	II		801	D			3000	D
		2600	D			1500	G			700	D			2500	G
		2500	D			1700	G			500	G			2700	G
						1900	G			600	G			2800	G
III		2500	G			2000	G			650	D			2900	O
		3000	G							610	G				
		4000	G	III		3000	D			620	D	III		2900	G
		5000	G			1000	G			615	G			3000	G

Pression = 0,25 gr. Température = 19°,1.				Pression = 0,5 gr. Température = 19°,1.				Pression = 1 gr. Température = 19°,1.				Pression = 2 gr. Température = 18°,6.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
	100	7000	D		100	1500	D		100	617	G		1000	4000	G
		6000	D			1200	G			619	G			4500	D
		5500	G			1300	G			618	O			4200	O
		5700	D			1400	G								
		5600	D			1450	D	III		618	G	IV		4200	G
		5550	D			1420	G			700	G			5000	G
		5520	D			1430	O			1000	D			7000	G
		5500	D							800	G			8000	G
				IV		1430	D			850	D			9000	G
IV		5500	D			1400	D			820	D			9500	D
		5000	D			1200	D			810	D			9200	D
		2000	G			1000	G			805	D			9100	D
		3000	D			1100	G			802	D			9050	G
		2500	G			1150	O			801	D			9070	D
		2700	G							800	O				
		2800	O	V		1150	G					V		9070	D
						2000	D	IV		1900	D			8000	D
V		2800	G			1200	G			1800	D			7000	D
		2900	D			1500	D			1700	D			5000	D
		2850	D			1300	D			1600	D			2000	G
		2820	D			1250	G			1500	D			4000	D
		2810	O			1270	D			1450	D			3509	G
						1260	D			1400	O			3700	G
VI		2810	G			1250	D							3800	O
		3000	G			1252	D	V		1400	D				
		4000	D			1250	D			1000	D	VI		3800	G
		3500	O							500	G			5000	G
				VI		1250	D			700	G			6000	O
VII		3500	D			1200	D			800	D				
		3000	D			1000	D			750	D	VII		6000	D
		2500	D			500	G			720	D			5000	G
		2000	G			700	G			710	G			5500	G
		2200	G			800	G			715	G			5700	G
		2300	G			900	G			717	G			5800	O
		2400	G			950	D			719	D				
		2500	D			920	G			718	G	VIII		5800	D
		2450	D			930	D							5700	D
		2420	G			925	D	VI		700	G			5500	D
		2430	G			922	G			705	G			5200	D
		2440	G			924	D			707	G			5000	D
		2445	D							709	G			4000	G
		2442	G	VII		924	G			710	G			4500	D
		2444	G			1000	G			770	G			4200	O
						2000	D			780	G				
VIII		2444	G			1500	D			790	G	IX		4200	G
		2500	G			1200	G			795	G			5000	G
		3000	D			1300	G			797	G			7000	D
		2700	G			1400	G			799	G			6500	D
		2800	D			1450	D			800	G			6200	D
		2750	D			1440	G			850	R			6100	D

Pression = 0,25 gr. Température = 19°,1.				Pression = 0,5 gr. Température = 19°,1.				Pression = 1 gr. Température = 19°,1.				Pression = 2 gr. Température = 18°,6.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
	100	2720	O		100	1445	D		100	840	O		1000	6050	D
						1442	G							6000	D
IX		2720	G			1444	D	VII		840	G			5500	O
		3000	G							900	G				
		4000	D	VIII		1444	G			1000	D	X		5500	D
		3500	D			2000	D			950	D			5000	D
		3200	D			1500	G			920	D			4500	D
		3000	D			1900	D			910	G			4000	D
						1800	D			915	G			3000	G
X		3000	G			1750	D			917	G			4000	D
		4000	G			1720	D			919	D			3500	O
		4050	G			1700	D			918	D				
		4200	D			1600	D			917	D				
		4100	D			1500	D								
		4050	D					VIII		917	D				
				IX		1600	G			900	D				
XI		4050	G			2000	D			800	D				
		4500	G			1700	G			700	D				
		5000	G			1800	G			650	G				
		7000	D			1900	D			670	G				
		6000	D			1850	D			680	D				
		5500	D			1820	D								
		5000	G			1810	D	IX		680	G				
		5200	D			1805	D			700	G				
		5150	D			1802	O			750	G				
		5100	D							770	G				
		5050	D	X		1802	G			780	G				
		5020	D			2000	G			800	G				
		5010	D			3000	D			900	G				
		5000	D			2500	D			950	G				
						2200	D			970	G				
XII		5000	D			2100	O			980	G				
		3000	D	XI		2100	D			990	G				
		2000	G			2000	D			995	G				
		2500	G			1500	G			1000	G				
		2700	O			1700	D			1050	O				
						1600	G								
XIII		2700	G			1650	D	X		1050	D				
		3000	G			1620	O			1000	O				
		3500	D												
		3200	D	XII		1620	G								
		3100	O			2000	D								
						1700	G								
XIV		3100	O			1800	O								
XV		3100	G	XIII		1800	D								
		4000	G			1500	D								
		5000	D			1400	D								
		4500	D			1300	D								
		4200	D			1200	D								

Pression = 0,25 gr. Température = 19°,1.				Pression = 0,5 gr. Température = 19°,1.				Pression = 1 gr. Température = 19°,1.				Pression = 2 gr. Température = 18°,6.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
	100	4100	D		100	1000	D								
		4050	D			700	G								
		4000	D			900	O								
XVI		4000	D	XIV		900	G								
		2000	G			2000	D								
		3000	D			1500	G								
		2500	D			1720	G								
		2200	G			1750	D								
		2300	D			1730	D								
		2200	G			1720	G								
		2250	D			1725	D								
		2240	G			1722	D								
		2245	G												
		2244	G	XV		2000	D								
		2250	G			1800	D								
						1750	D								
XVII		2250	G			1730	D								
		3000	G			1720	D								
		3500	D			1700	D								
		3200	O			1600	D								
						1500	D								
XVIII		3200	G			1200	G								
		3300	D			1250	D								
		3250	D			1220	D								
		3200	D			1210	G								
XIX		3200	G	XVI		1210	G								
		3300	G			1500	G								
		3400	D			1550	G								
		3350	G			1570	D								
		3370	O			1560	O								
XX		3370	D	XVII		1560	D								
		3300	D			1500	D								
		3000	D			1200	D								
		2000	G			1100	D								
		2500	G			1000	D								
		2700	G			700	G								
		2800	D			800	G								
		2750	D			900	G								
		2700	G			950	D								
		2720	G			900	D								
		2730	D												
		2725	G	XVIII		900	G								
		2727	R			2000	D								
						1500	G								
						1700	G								
						1800	G								
						1900	D								

Pression = 0,25 gr. Température = 19°,1.				Pression = 0,5 gr. Température = 19°,1.				Prassion = 1 gr. Température = 19°,1.				Pression = 2 gr. Température = 18°,6.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
	100				100	1850	G								
						1870	D								
						1860	D								
						1850	D								
				XIX		1850	D								
						1800	D								
						1500	D								
						1400	D								
						1300	G								
						1350	G								
						1370	G								
						1390	D								
						1380	G								
						1385	O								
				XX		1385	G								
						1500	G								
						1700	G								
						1900	G								
						1950	G								
						1970	G								
						1990	G								
						1995	D								
						1990	D								

TABLEAU II.

Pression = 3 gr. Température = 18°.				Pression = 4 gr. Température = 18°.				Pression = 5 gr. Température = 19°,8.				Pression = 10 gr. Température = 19°,8.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
I	1000	5000	G	I	1000	5000	G	I	1000	3500	G	I	1000	5000	D
		5500	D			6000	G			3700	O			3000	D
		5200	D			7000	D							2000	L
		5100	D			6500	D	II		3700	D			2500	O
		5050	O			6400	G			3500	D				
						6450	G			3000	D	II		2500	G
II		5050	G			6500	D			2500	O			3000	D
		5100	G			6470	O							2700	G
		5200	D					III		2500	G			2800	O
		5150	D	II		6470	D			3000	G				
		5120	D			5000	D			3500	G	III		2800	D
		5100	D			4000	D			4000	O			2000	G
						3000	D							2500	D
III		5100	D			2900	G	IV		4000	D			2200	D
		5000	D			2950	G			3500	D			2100	D
		4500	O			2970	D			3200	D			2000	O

Pression = 3 gr. Température = 18°.				Pression = 4 gr. Température = 18°.				Pression = 5 gr. Température = 19°,8.				Pression = 10 gr. Température = 19°,8.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
									1000	3100	D				
IV	1000	4500	D	III	1000	2970	G			3000	D	IV	1000	2000	G
		4200	D			3000	D			2500	O			5000	D
		4100	D			2980	O							3000	G
		4000	D					V		2500	G			3500	D
		3500	O	IV		2980	D			3000	G			3200	D
						2970	G			3200	O			3100	O
V		3500	D												
		3200	D	V		2970	G	VI		3200	O	V		3100	D
		3100	D			3000	G							2000	G
		3000	D			3200	D	VII		3200	O			2500	O
		2500	G			3100	O								
		2700	O					VIII		3200	G	VI		2500	D
				VI		3100	G			3500	G			2000	O
VI		2700	G			3300	G			3700	G				
		3700	G			3400	D			3800	G	VII		2000	D
		4000	G			3350	O			3900	G			1000	G
		5000	D							3950	G			1500	G
		4900	O	VII		3350	G			3970	G			1700	G
						4000	G			4000	G			1900	G
VII		4900	D			5000	G			4200	O			1950	D
		4700	D			6000	G								
		4600	D			7000	G	IX		4200	G	VIII		1950	G
		4500	D			8000	G			5000	G			2000	G
		4200	D			9000	D			5500	G			3000	D
		4100	D			8500	G			5700	O			2500	D
		4000	D			8700	G							2200	O
		3900	D			8900	G	X		4000	O				
		3800	D			8950	G					IX		2200	G
		3700	D			8970	G	XI		4000	D			3000	D
		3600	D			8990	G			3500	O			2500	D
		3200	G											2300	D
		3300	G	VIII		8990	D	XII		3500	D			2200	D
		3400	G			8000	D			3000	O				
		3450	G			7000	D					X		2200	G
		3470	D			5000	G	XIII		3000	G			3000	G
						6000	D			3200	O			4000	D
VIII		3470	D			5500	G							3500	D
		3400	D			5700	G	XIV		3200	G			3200	O
		3200	D			6000	G			3500	O				
		3100	G									XI		3200	O
		3150	G	IX		6000	D	XV		3500	O				
		3170	O			5000	D					XII		3200	D
						4000	G	XVI		3500	G			3000	D
IX		3170	G			4500	D			3700	O			2000	G
		4000	D			4200	D							2500	G
		3500	G			4100	D	XVII		3700	G			2700	G
		3700	D			4050	D			4000	G			2900	D
		3600	D			4000	D			5000	G			2800	D
		3500	D							7000	D				

Pression = 3 gr. Température = 18°.				Pression = 4 gr. Température = 18°.				Pression = 5 gr. Température = 19°,8.				Pression = 10 gr. Température = 19°,8.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
				X	1000	4000	D		1000	6000	G	XIII	1000	2800	G
X	1000	3500	G			3000	G			6550	G			3000	G
		4000	G			3500	D			6700	D			4000	G
		5000	D			3400	O			6600	D			5000	D
		4500	G							6550	O			4500	G
		4600	G	XI		3400	D							4700	D
		4700	G			3200	D	XVIII		6500	D			4600	O
		4900	G			3100	O			5000	D				
		4970	G							4000	D	XIV		4600	D
		5000	G	XII		3100	G			3000	D			3000	G
						3300	G			2000	O			3500	D
XI [1])		4200	D			3400	G							3200	O
		4000	D			3900	G	XIX		2000	G				
		3500	G			4000	G			3000	O	XV		3200	G
		3700	O			4500	D							4000	O
						4200	O	XX		3000	G				
XII		3700	G							4000	G	XVI		4000	D
		3900	G	XIII		4200	D			4500	D			2000	D
		4000	G			4000	G			4200	O			1000	G
		4500	G			4100	D							1500	G
		4700	G			4050	D							1600	O
		4900	O			4020	D								
						4000	D								
XIII		4900	D												
		5000	D	XIV		4000	D								
		5500	G			3500	D								
		5700	O			3200	O								
XIV		5700	D	XV		3200	G								
		5500	D			3500	G								
		5000	D			4000	G								
		4000	G			4500	O								
		4500	G												
		4700	D	XVI		4500	G								
		4600	O			5000	G								
						6000	D								
XV		4600	G			5500	G								
		4800	G			5700	G								
		4900	G			5800	G								
		5500	D			5900	O								
		5200	D												
		5100	D	XVII		5900	D								
		5000	D			5000	D								
		4900	G			4000	D								
						3000	G								
XVI		4900	G			3500	G								
		4500	G			3700	D								

[1]) A partir de cette série la température a été 19°,8.

Pression = 3 gr. Température = 19°,8.				Pression = 4 gr. Température = 18°.				Pression = 5 gr. Température = 19°,8.				Pression = 10 gr. Température = 19°,8.			
(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
	1000	4000	D		1000	3600	D								
		3000	D			3500	D								
		2000	G												
		2500	G	XVIII		3500	O								
		2700	G												
		2900	D	XIX		3500	G								
		2800	O			3800	G								
						3900	G								
XVII		2800	G			3970	O								
		3000	G												
		5000	D	XX		3900	D								
		4000	G			3700	D								
		4500	O			3500	O								
XVIII		4500	G												
		5000	O												
XIX		5000	G												
		6000	O												
XX		6000	D												
		5000	O												

Nous avons donc trouvé pour la résistance de la branche CD:

TABLEAU III.

Avec la pression 0,25 gr.	Avec la pression 0,5 gr.	Avec la pression 1 gr.	Avec la pression 2 gr.	Avec la pression 3 gr.	Avec la pression 4 gr.	Avec la pression 5 gr.	Avec la pression 10 gr.
24,95 ohms	12,05 ohms	8,01 ohms	9,12 ohms	5,05 ohms	6,470 ohms	3,700 ohms	2,500 ohms
25,00	20,00	6,18	2,90	5,10	2,960	2,500	2,800
55,00	14,30	8,00	4,20	4,50	2,980	4,000	2,000
28,00	11,50	14,00	9,06	3,50	2,975	2,500	3,100
28,10	12,50	7,18	3,80	2,70	3,100	3,200	2,500
35,00	9,23	8,40	6,00	4,90	3,350	3,200	2,000
24,44	14,43	9,17	5,80	3,47	8,995	3,200	1,920
27,20	15,00	6,75	4,20	3,17	6,000	4,200	2,200
30,00	10,02	10,50	5,50	3,50	4,000	5,700	2,200
40,50	21,00	10,00	3,50	5,00	3,400	4,000	3,200
50,00	16,20			3,70	3,100	3,500	3,200
27,00	18,00			4,90	4,200	3,000	2,750
31,00	9,00			5,70	4,000	3,200	4,600
31,00	17,21			4,60	3,200	3,500	3,200
40,00	12,15			4,95	4,500	3,500	4,000
22,50	15,60			2,80	5,900	3,700	1,600
32,00	9,00			4,50	3,500	6,550	2,200
32,00	18,50			5,00	3,500	2,000	3,000
33,74	13,85			6,00	3,970	3,000	2,000
27,26	19,90			5,00	3,500	4,200	2,900

Les moyennes sont:

Avec la pression 0,25 gr.	Avec la pression 0,5 gr.	Avec la pression 1 gr.	Avec la pression 2 gr.	Avec la pression 3 gr.	Avec la pression 4 gr.	Avec la pression 5 gr.	Avec la pression 10 gr.
32,23	14,872	8,819	5,408	4,402	4,18	3,617	2,698

avec les erreurs probables:

± 1,27	± 0,56	±0,49	± 0,47	± 0,14	± 0,24	± 0,16	± 0,11

On a donc pour les résistances au passage:

32,11	14,75	8,7	5,29	4,28	4,06	3,5	2,57

avec les mêmes erreurs probables.

§ 8. La fig. 6 montre le rapport entre les résistances au passage et les pressions. Ces dernières y sont représentées par des abscisses, les premières par des ordonnées. Ainsi, les ordonnées des points a, b, c, d, e, f, g et h représentent les résistances au passage sous les pressions 0,25 gr., 0,5 gr., 1 gr., 2 gr., 3 gr., 4 gr., 5 gr. et 10 gr. Les ohms et les *demi*-grammes sont représentés par des longueurs égales.

En joignant les points a, b, c, d, e, f, g et h, on obtient une courbe dont la forme est assez régulière et paraît se rapprocher de celle d'une hyperbole équilatère.

Si l'on admet ce rapprochement, notre courbe pourrait être représentée par l'équation

$$y = a + \frac{b}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où a désignerait la limite vers laquelle la résistance tendrait à mesure que la pression augmente.

J'ai calculé les valeurs de a et de b par la méthode des moindres carrés, en supposant que c'était la somme des carrés des erreurs *relatives* qui devait être un minimum. En outre, il a été attribué à chaque détermination un poids inversement proportionnel au carré de l'erreur probable trouvée. J'ai obtenu de la sorte:

$$a = 1{,}981 \text{ et } b = 6{,}914.$$

Ces valeurs ont servi à calculer le tableau suivant:

TABLEAU IV.

Pression en grammes.	Résistances au passage, en ohms. observ.	Résistances au passage, en ohms. calculées.	Différences.	Erreurs probables. 1ère puiss.	Erreurs probables. 2ème puiss.	Erreurs relatives des résistances au passage observées. 1ère puiss.	Erreurs relatives des résistances au passage observées. 2ème puiss.
0,25	32,11	29,64	+ 2,47	+ 0,077	0,00592	± 0,039	0,00156
0,5	14,75	15,81	— 1,06	— 0,072	0,00516	± 0,019	0,00036
1	8,7	8,89	— 0,19	— 0,022	0,00048	± 0,056	0,00031
2	5,29	5,44	— 0,15	— 0,028	0,00080	± 0,088	0,00774
3	4.28	4,29	— 0,01	— 0,002	0,00001	± 0,033	0,00111
4	4,06	3,71	+ 0,35	+ 0,086	0,00743	± 0,059	0,00034
5	3,5	3.36	+ 0,14	+ 0,040	0,00160	± 0,045	0,00204
10	2,57	2,67	— 0,10	— 0,039	0,00151	± 0,044	0,00190
				Somme	0,02291		0,01536

Entre les nombres de la quatrième colonne et les nombres correspondants de la sixième colonne la différence n'est pas très grande. On peut donc dire que la courbe calculée représente assez bien les phénomènes. Cela résulte aussi de la fig. 6, où la courbe calculée est marquée par un trait continu, et la courbe déduite de l'observation directe, par une ligne pointillée.

§ 9. Une autre question est celle de savoir si les résultats obtenus nous autorisent à conclure que la résistance au passage est réellement en raison inverse de la pression. Pour pouvoir répondre affirmativement à cette question il faudrait que la somme des carrés contenus dans la sixième colonne différât moins de la somme des carrés inscrits dans la huitième colonne.

J'ai pensé qu'il serait peut-être utile, pour la solution de cette question, d'examiner jusqu'à quel point l'introduction d'un terme de plus dans notre équation (1) pourrait rapprocher l'une de l'autre les deux sommes dont il s'agit.

A cet effet, j'ai pris l'équation

$$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et, procédant comme il a été dit dans le § précédent, j'ai trouvé pour a, b, et c les valeurs suivantes

$$a = 2{,}105 \qquad b = 6{,}1894 \qquad c = 0{,}2691.$$

A l'aide de ces valeurs j'ai calculé le tableau suivant

TABLEAU V.

Pression en grammes.	Résistances au passage, en ohms. observ.	calculées.	Différences.	Erreurs probables. 1ère puiss.	2ème puiss.	Erreurs relatives des résistances au passage observées. 1ère puiss.	2ème puiss.
0,25	32,11	31,18	+ 0,93	+ 0,029	0,00084	± 0,039	0,00156
0,5	14,75	15,58	— 0,83	— 0,056	0,00317	± 0,019	0,00036
1	8,7	8,58	+ 0,12	+ 0,014	0,00019	± 0,056	0,00031
2	5,29	5,28	+ 0,01	+ 0,005	0,00003	± 0,088	0,00774
3	4,28	4,21	+ 0,07	+ 0,016	0,00027	± 0,033	0,00111
4	4,06	3,68	+ 0,38	+ 0,094	0,00876	± 0,059	0,00034
5	3,5	3,37	+ 0,13	+ 0,037	0,00138	± 0,045	0,00204
10	2,57	2,74	— 0,17	— 0,066	0,00438	± 0,044	0,00190
				Somme	0,01902		0,01536

La somme des carrés des erreurs relatives s'est effectivement rapprochée de 0,01536, ce qui d'ailleurs devait nécessairement arriver du moment que nous disposions d'une constante de plus. Si donc les équations (1) et (2) sont uniquement considérées comme formules d'interpolation, il va sans dire que la seconde mérite la préférence; mais s'il s'agit de leur attribuer une signification plus haute, je pense que les erreurs relatives des observations sont trop fortes pour qu'on puisse déjà se prononcer définitivement. On peut donc seulement admettre à titre de loi approximative provisoire, que les résistances au passage sont en raison inverse des pressions.

§ 10. Il suit de nos formules que, pour un accroissement ou un décroissement très petits de la pression, la résistance au passage éprouvera un changement qui sera en raison inverse de la pression primitive. La sensibilité d'un microphone dépendra donc, en grande partie, de la force avec laquelle les deux morceaux de coke sont pressés l'un contre l'autre. Plus cette force est petite, plus sera grande la sensibilité. On ne doit pas perdre de vue, toutefois, que lorsqu'un microphone transmet avec une amplification considérable les sons faibles, il ne se prête plus aussi bien à la reproduction des sons intenses. En effet, plus

est légère la force qui presse entre eux les deux morceaux de coke, plus il y a de chance pour qu'en vibrant ils se séparent l'un de l'autre. Lorsque cela arrive, il se forme de petits arcs de Davy; le son que ceux-ci produisent se transmet au téléphone et y occasionne un crépitement ou bruissement, qui peut être très gênant. Aussi est-il permis de dire, dans une certaine mesure, que toute modification de l'intensité du son détermine une modification dans le microphone.

Pour avoir un microphone auquel on puisse donner tous les degrés voulus de sensibilité, il suffit d'apporter un léger changement à l'appareil décrit au § 1. Ce changement consiste à remplacer les cylindres *lm* et *np* par deux prismes triangulaires A et B (fig. 7). Si dans l'appareil ainsi modifié on fait glisser le parallélipipède vers la gauche, par exemple, il est clair que, à mesure que son centre de gravité *z* se rapprochera du prisme A, la pression sur le prisme B deviendra moindre. Sur A, il est vrai, la pression deviendra plus grande; mais il est facile de montrer, et cela ressort d'ailleurs de la fig. 6, que la résistance au passage croîtra plus fortement en B qu'elle ne décroîtra en A. Aussi toutes les expériences connues peuvent-elles être répétées avec cet appareil.

§ 11. Lorsque l'appareil doit seulement servir à remplacer dans un couple téléphonique le téléphone transmetteur, il n'est pas désirable qu'il soit très sensible. Je me suis, au contraire, fort bien trouvé d'entourer la boîte, y compris le parallélipipède, d'un anneau en caoutchouc. La parole était reproduite plus faiblement, il est vrai, mais avec plus de netteté, attendu qu'il ne pouvait plus être question de la production d'arcs de Davy.

§ 12. Ce qui a tout d'abord excité spécialement mon intérêt pour le nouvel appareil, c'est qu'il m'a paru offrir le moyen de transmettre la parole à une distance beaucoup plus grande que cela n'était possible avec le couple téléphonique.

Soit, en effet, L la résistance de la plus grande longueur de fil télégraphique qu'on puisse introduire, sans dommage pour la bonne transmission de la dépêche, dans un circuit composé d'un

téléphone et d'un appareil galvanique donné ; l'intensité du courant sera alors exprimée par l'équation :

$$I_1 = \frac{E}{R + T + M + L},$$

où E désigne le potentiel de l'appareil galvanique, R sa résistance, T celle du téléphone, et M la résistance du microphone, y compris la résistance au passage.

En supposant que par la vibration du microphone la résistance au passage éprouve une augmentation, que nous appellerons Δ, l'intensité du courant prendra une valeur différente, exprimée par l'équation :

$$I_2 = \frac{E}{R + T + M + \Delta + L}.$$

On sait que le déplacement de la petite plaque en fer du téléphone dépend de la différence de ces deux intensités, c'est-à-dire de

$$I_1 - I_2 = E \frac{\Delta}{(R+T+M+L)(R+T+M+\Delta+L)},$$

et que, chaque fois que le courant subit dans une même durée de temps un même changement, la plaque de fer se déplace aussi d'une même quantité. Pour obtenir maintenant ce même déplacement lorsque le courant doit parcourir un fil télégraphique n fois plus long, on n'a qu'à employer n fois plus d'éléments galvaniques et à introduire aussi n fois plus de microphones dans le circuit. Car on aura alors, en représentant les deux intensités du courant I'_1 et I'_2,

$$I'_1 - I'_2 = E \frac{\Delta}{\left(R + \frac{T}{n} + \frac{p}{n} M + L\right)\left(R + \frac{T}{n} + \frac{p}{n} M + \Delta + L\right)},$$

si l'on admet que la résistance de n microphones est p fois plus grande que celle d'un seul.

Comme p n'est en général pas plus grand que n, la valeur de $I'_1 - I'_2$, strictement parlant, dépassera encore celle de $I_1 - I_2$.

J'ai vérifié par l'expérience les déductions qui précèdent. Sur le couvercle d'une boîte en planure de bois étaient placés 14

morceaux de coke, indiqués dans la fig. 8 par des traits continus, et dont deux, *lm* et *np*, étaient rattachés au circuit. Ces morceaux étaient accouplés l'un à l'autre par des parallélipipèdes de coke, couchés en travers sur eux et représentés dans la figure par des lignes pointillées. Le tout formait ce qu'on peut appeler une batterie microphonique, batterie composée de 13 éléments. Or, quand on introduisait dans le circuit une résistance de 12200 ohms, égale à celle d'environ 244 lieues de fil télégraphique, et que le potentiel de l'appareil galvanique valait celui de 27 éléments de Bunsen, tous les mots prononcés à proximité de la batterie microphonique étaient distinctement compris près du téléphone [1]). Lorsque le nombre des éléments microphoniques était augmenté de 3, on pouvait même se placer à une distance de 8 à 10 mètres de la batterie microphonique, mais au téléphone il fallait alors écouter avec une attention plus soutenue.

C'est uniquement pour ne rien omettre de mes expériences que j'ai communiqué les observations contenues dans ce §. M. Hoorweg et d'autres ont postérieurement indiqué un moyen plus pratique d'atteindre le même but, à savoir, par l'emploi de courants d'induction.

---

[1]) Dans la séance de l'Académie d'Amsterdam du 25 mai dernier, et aussi dans un article de l'*Album der Natuur*, j'ai rapporté qu'à l'aide d'une batterie microphonique de 5 éléments et d'un appareil galvanique dont le potentiel équivalait à peu près à celui de 8 éléments de Bunsen, des mots prononcés au voisinage de la batterie microphonique avaient été distinctement entendus près du téléphone, même quand le circuit comprenait une résistance de 10000 ohms. Malheureusement, on n'avait expédié dans ces expériences que des phrases attendues, telles que „comprenez-vous encore?" „tout va-t-il encore bien?" etc. Lorsque plus tard, ces expériences ayant été répétées, l'expéditeur eut par hasard prononcé une phrase à laquelle la personne placée au téléphone n'était pas préparée, la dépêche ne fut pas bien comprise; il résulte de là qu'on avait opéré, la première fois, avec des moyens insuffisants.

Fig. 1.

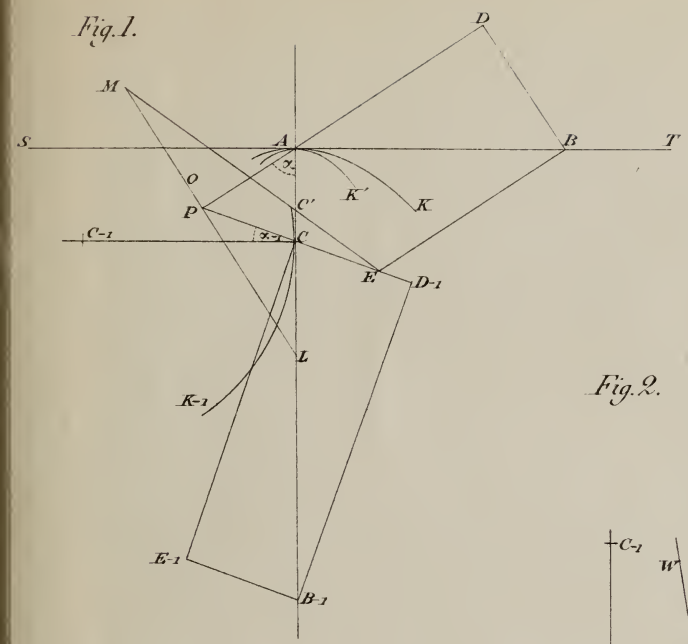


Fig. 2.

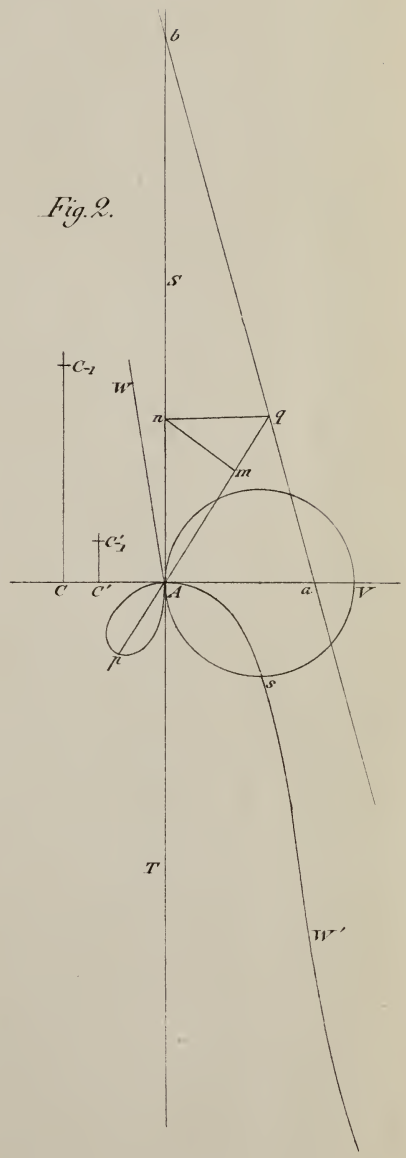
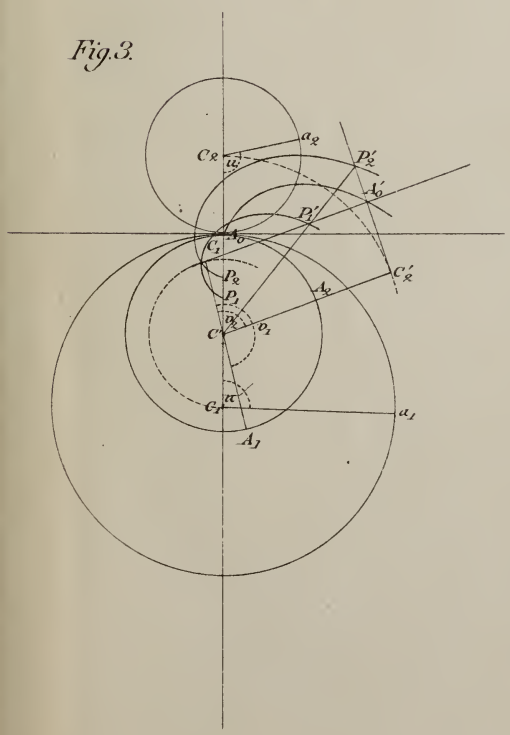
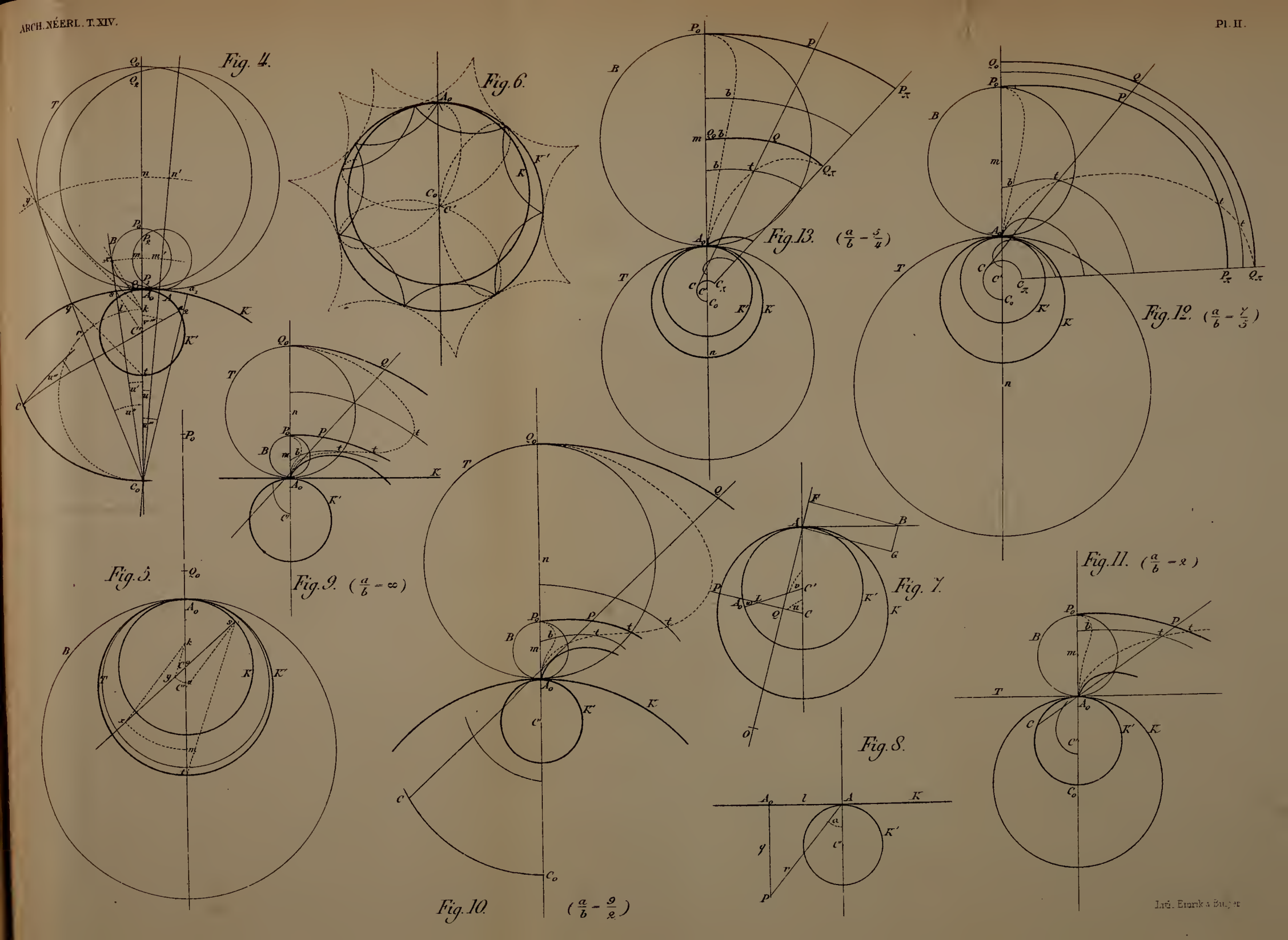


Fig. 3.



Lith. Emrik & Binger.



Lith. Emrik & Buijer

Fig. 14 $\left(\frac{a}{b} = \frac{4}{5}\right)$

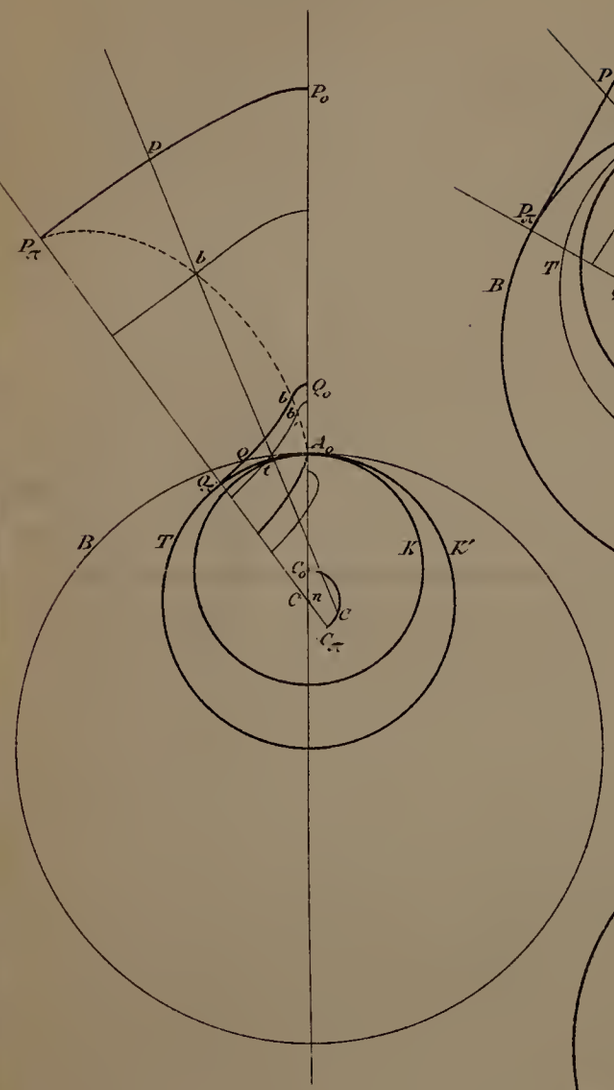


Fig. 15.a $\left(\frac{a}{b} = \frac{2}{3}\right)$

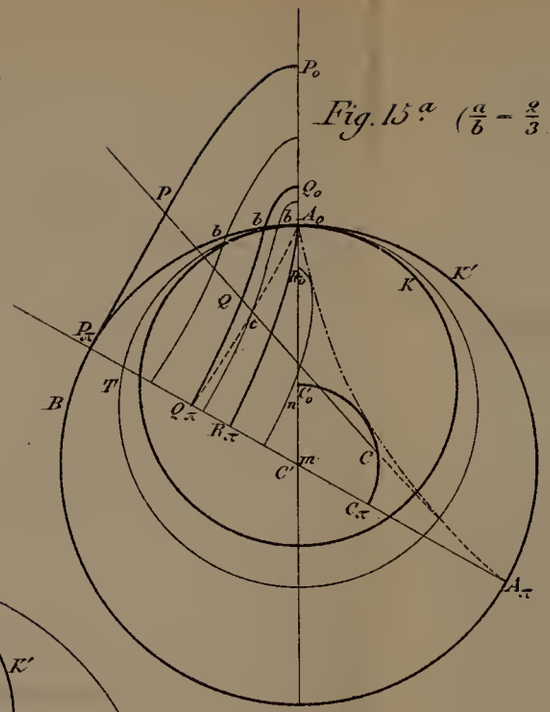


Fig. 16 $\left(\frac{a}{b} = \frac{1}{2}\right)$

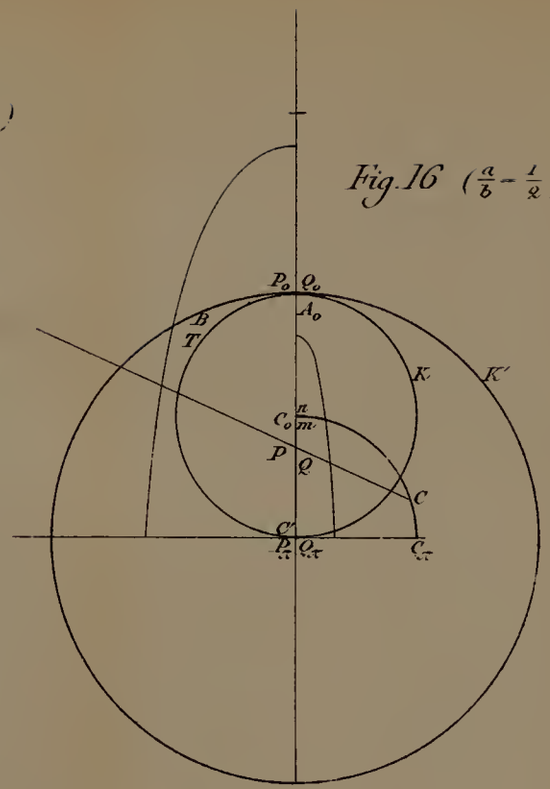


Fig. 18.

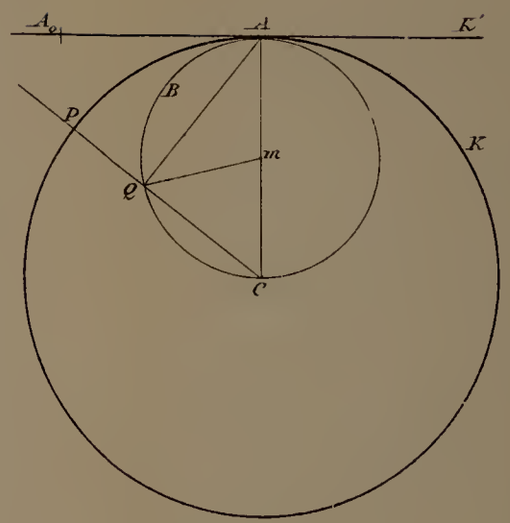


Fig. 15.b $\left(\frac{a}{b} = \frac{1}{3}\right)$

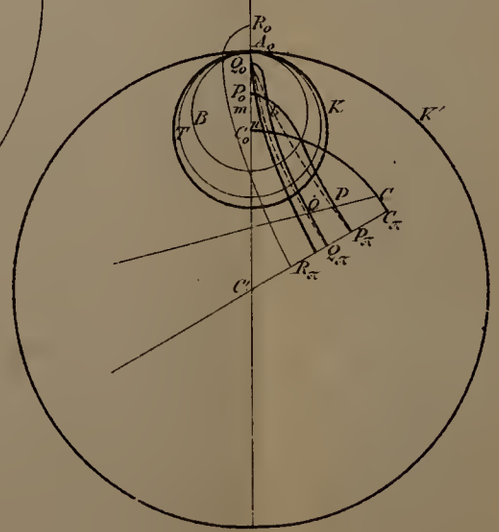
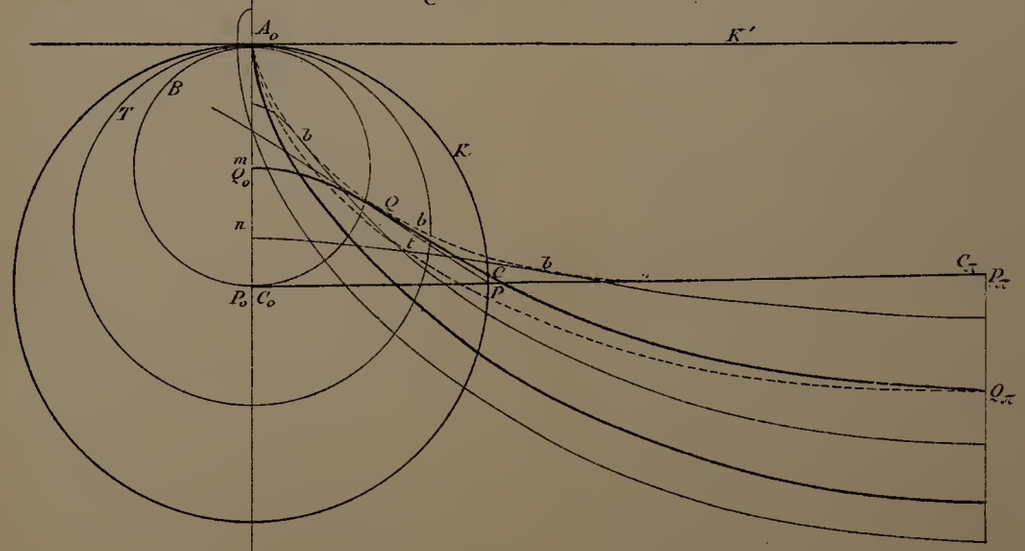


Fig. 17 $\left(\frac{a}{b} = \frac{1}{\infty}\right)$



Lith. Emmic & Binger

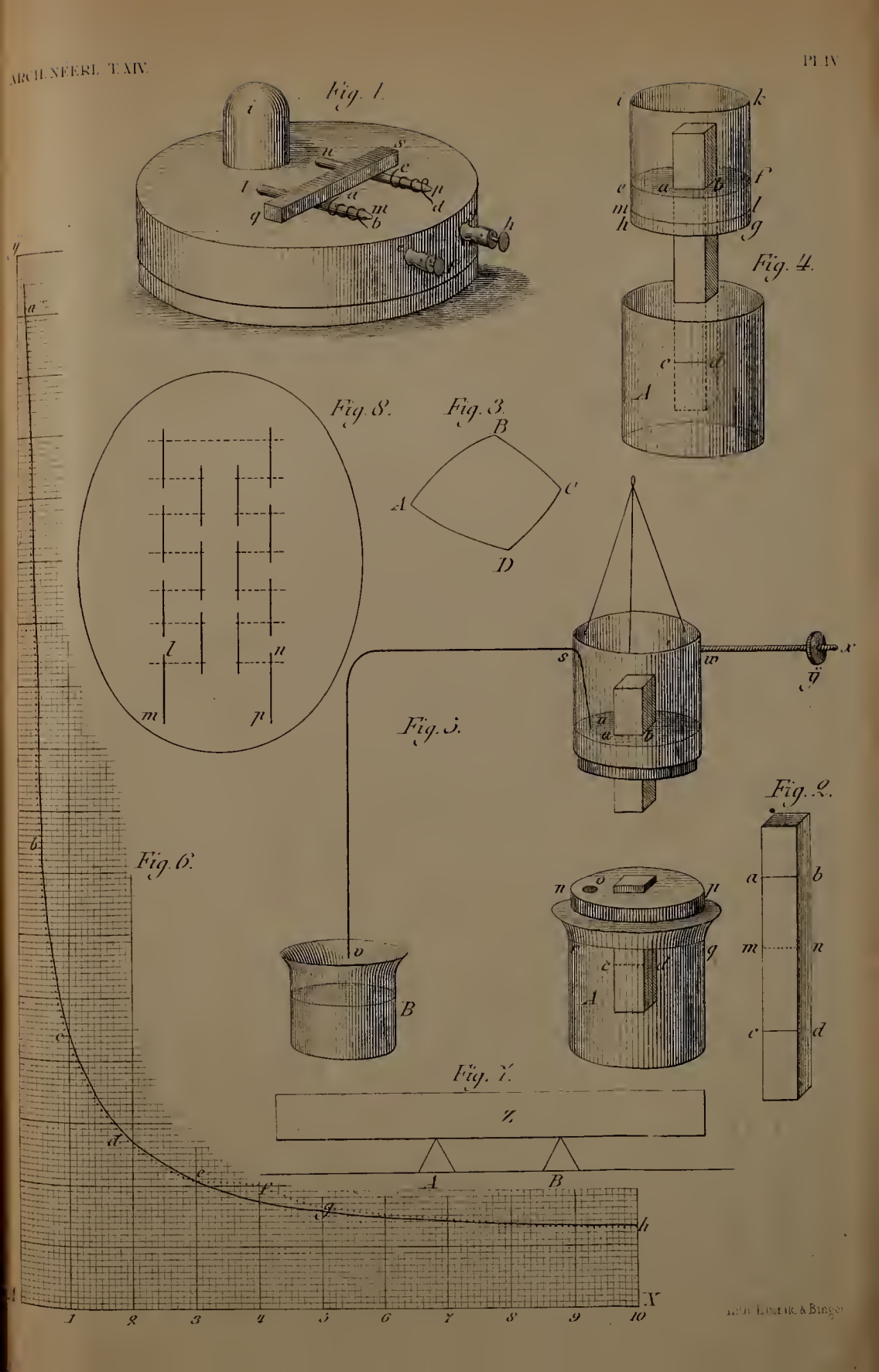


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 7.
Z
A
B
X
Y
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

PREMIÈRE LIVRAISON.

H. Onnen, Notes concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes..... Pag. 1.
P. L. Rijke, Sur le microphone..... " 76.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XIV. 2me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et S. C. Snellen van Vollenhoven.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1879.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

SUR LA THÉORIE DU RADIOMÈTRE,

PAR

R. A. MEES.

En mai 1878 j'ai présenté à l'Académie des sciences d'Amsterdam un mémoire assez étendu sur la théorie du radiomètre, mémoire qui a été publié plus tard dans le Bulletin de l'Académie [1]) et dont je vais donner ici un résumé succinct.

L'action répulsive que les rayons lumineux et calorifiques exercent sur des corps légers placés au sein de gaz très raréfiés, action dont M. Crookes a le premier fait une étude exacte, a été l'objet de tentatives d'explication très variées. Dans la première partie de mon Mémoire j'ai passé en revue ces divers modes d'explication. Toutefois, trois classes seulement des théories proposées pour rendre compte des phénomènes ont été soumises par moi à une critique un peu détaillée, attendu que les autres avaient déjà été réfutées suffisamment, ou bien étaient si incomplètes et si improbables qu'il semblait inutile de les combattre spécialement. Les théories dont j'ai fait l'examen critique sont les suivantes: 1° la théorie de l'évaporation de M. Osborne Reynolds,

[1]) *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde*, 2me Série, t. XIII.

et la théorie de l'émission de M. Zöllner, analogue sous beaucoup de rapports à la première; 2° les théories qui expliquent l'action des rayons lumineux par des courants gazeux; 3° les théories qui expliquent cette action à l'aide de la théorie cinétique des gaz, en la considérant comme un effet produit entre un corps solide et le gaz qui le touche, lorsque de la chaleur passe du corps au gaz ou réciproquement.

Pour ce qui concerne, en premier lieu, la théorie de l'évaporation, on sait qu'elle attribue la répulsion d'un objet léger par un corps chaud à l'évaporation d'eau, de mercure ou d'autres liquides, au côté de l'objet qui est tourné vers le corps chaud; et que, pareillement, elle explique l'attraction de l'objet par un corps froid au moyen de la condensation des vapeurs de ces mêmes liquides sur la face de l'objet qui regarde le corps froid. D'après cette théorie, l'évaporation à la surface d'un corps aurait pour conséquence une augmentation de la pression sur cette surface, la condensation de vapeur sur le corps produirait une diminution de la pression, et cette augmentation ou diminution de la pression occasionnerait la répulsion ou l'attraction observée.

Je pense, avec M. Reynolds [1]), que par l'évaporation ou la condensation un accroissement ou un décroissement de la pression peut être déterminé, et je reconnais aussi qu'un mouvement peut être obtenu de cette manière. Ce dernier point a d'ailleurs été prouvé expérimentalement par M. Reynolds et par M. Govi. Mais que M. Reynolds ait trouvé dans cette action la vraie cause des phénomènes observés par M. Crookes, c'est ce que différentes raisons me portent à mettre en doute. Mon objection capitale à la théorie de M. Reynolds, c'est que la cause invoquée peut bien produire *initialement* une répulsion ou une attraction et déterminer un *commencement* de mouvement, mais qu'elle ne saurait entretenir ces phénomènes d'une manière *continue*. En effet, quand l'objet léger a été soumis quelque temps

[1]) *Phil. Mag.*, (4), t. XLVIII, p. 146.

à l'influence du corps chaud ou froid, ou quand le rayonnement a agi quelque temps sur le radiomètre, toute la matière volatilisable aura quitté par évaporation les parties chaudes et se sera précipitée sur les parties froides; une nouvelle évaporation ou une nouvelle condensation ne peut alors plus avoir lieu, la cause de la répulsion ou de l'attraction et par suite du mouvement du radiomètre a disparu, et avec elle doivent cesser les effets.

La théorie de l'émission, de M. Zöllner [1]), me paraît encore beaucoup moins acceptable. Elle attribue les mouvements du radiomètre non pas à l'évaporation de matières volatiles, mais à celle des parties solides de l'appareil, à l'émission de particules déliées par la surface de ces parties solides.

En premier lieu, je regarde cette théorie comme extrêmement improbable, et ensuite, comment expliquer par elle le fait que la vitesse de rotation commence à diminuer dans le radiomètre lorsqu'un certain degré de raréfaction du gaz a été dépassé? Il semblerait plutôt que les particules émises par les corps solides dussent produire le plus grand effet quand le gaz est le plus raréfié, d'abord parce que la résistance au mouvement est alors le plus faible, et en second lieu parce que le nombre des particules émises doit alors être le plus grand.

D'après les théories de la seconde des trois classes distinguées ci-dessus, l'élévation inégale de la température des différentes parties du radiomètre entraînera aussi l'échauffement inégal des différentes parties du gaz que ce radiomètre contient, et c'est aux courants gazeux, qui sont la conséquence nécessaire de ces inégalités, qu'est due la mise en mouvement des ailettes du radiomètre. Voici, par exemple, comment s'exprime M. O. E. Meyer [2]): „Les ailettes du moulinet, qui sont noires d'un côté et blanches de l'autre, sont échauffées . . . par le rayonnement de chaleur ou aussi de lumière, et cela dans une mesure inégale, le côté noir l'étant le plus fortement. Par suite, l'air qui confine à la face noire devient

[1]) *Pogg. Ann.*, t. CLX.

[2]) *Die Kinetische Theorie der Gase*, Breslau 1877, p. 154.

aussi plus chaud, il se dilate et s'écoule autour des bords des ailettes vers la face blanche, et met ainsi en mouvement les ailettes par son frottement sur leurs bords." Cette explication de M. Meyer me paraît très invraisemblable. Je ne vois pas du tout pourquoi l'air qui se dilate au côté chaud de l'ailette chercherait une issue autour des bords vers le côté froid; j'inclinerais à croire, au contraire, qu'il s'élèvera verticalement, ou qu'il s'éloignera de l'ailette en restant au côté chaud. Le côté froid, en effet, s'est aussi échauffé au-dessus de la température ambiante, et par conséquent, de ce côté aussi, l'air adjacent s'est dilaté, quoique à un moindre degré qu'au côté chaud. Or cette dilatation de l'air au côté froid doit empêcher que l'air du côté chaud ne s'épanche autour des bords vers le côté froid; cet épanchement n'ayant pas lieu, l'explication croule d'elle-même.

M. F. Neesen a essayé de rendre compte avec plus de détail des mouvements du radiomètre au moyen de courants d'air [1]). Mais l'action de ces courants est conçue par lui tout autrement que par M. Meyer. Tandis que pour celui-ci la force motrice réside dans le frottement que l'air en se dilatant exerce sur les bords des ailettes, M. Neesen la cherche dans le choc des courants dirigés vers les ailettes et venant les frapper. Le côté de l'ailette ou de l'objet léger, qui est tourné vers la source calorifique, acquiert une température supérieure à celle des objets environnants; l'air qui est en contact avec ce côté participera à l'échauffement et par suite montera, ce qui donnera naissance à des courants d'air horizontaux dirigés vers le côté chaud et le chassant devant eux. Si je comprends bien M. Neesen, ce sont toujours les courants dirigés vers l'endroit ou l'air s'élève qui produisent le mouvement, puisqu'ils poussent devant eux les objets légers placés sur leur chemin. Dans ses expériences, c'est tantôt une des faces de l'ailette, tantôt une partie de la paroi en verre du radiomètre, qui s'échauffe le plus au-dessus de la température du gaz contenu dans l'appareil, et vers laquelle

---

[1]) *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 144; t. CLV, p. 143.

marchent par conséquent les courants d'air; néanmoins, ce sont toujours ces courants, de direction différente dans les différents cas, qui, suivant M. Neesen, agissent comme force motrice.

M. Neesen obtient, de la manière qui vient d'être dite, une explication du fait que, dans un gaz raréfié, un objet dont un des côtés est plus chaud que les corps qui l'entourent prend un mouvement dans une direction telle que le côté chaud soit en arrière. On reconnaît toutefois immédiatement que cette explication ne saurait être vraie, si l'on considère le cas où l'un des côtés de l'objet léger se refroidit, par exemple par rayonnement, au-dessous de la température du gaz ambiant. Appliquons à ce cas le raisonnement de M. Neesen. De courants d'air chaud ascendant il ne peut être question ici, púisque aucune portion de surface solide ne s'est échauffée au-dessus de la température du gaz. Mais, sur le côté refroidi de l'objet léger, le gaz se refroidira aussi, et de là résultera, en ce point, un courant d'air descendant. Celui-ci, toujours d'après le raisonnement de M. Neesen, donnera lieu à des courants dirigés vers le côté refroidi, attendu que l'air ambiant ira prendre la place de celui qui s'est refroidi et qui est descendu le long de ce côté. Ces courants d'air chasseront devant eux l'objet léger, et par conséquent lui imprimeront un mouvement tel que le côté refroidi se trouvera en arrière. Or, cette conséquence de la théorie de M. Neesen est en contradiction formelle avec les résultats de l'expérience.

Mais, outre les objections que je viens de présenter, j'en ai encore une autre, qui s'adresse aussi bien à la théorie de M. Meyer qu'à celle de M. Neesen. D'après toutes les deux, l'action des rayons lumineux ou calorifiques devrait se faire sentir avec d'autant plus de force que le gaz a une plus grande densité. Car, de l'aveu même de M. Meyer, le frottement extérieur des gaz sur les corps solides augmente et diminue proportionnellement à la densité du gaz, et par conséquent, dans sa théorie, la force motrice du radiomètre, qui consiste dans le frottement du gaz dilaté contre les bords de l'ailette, devrait aussi augmenter et diminuer avec la densité. Il en serait de même

dans la théorie de M. Neesen, puisque la force impulsive des courants est proportionnelle à la masse du gaz en mouvement, et que cette masse est proportionnelle à la densité du gaz. Or, toute force qui varie en raison de la densité doit être rejetée comme cause de mouvement des ailettes du radiomètre, car une pareille cause ne pourrait s'accorder avec le fait que la vitesse d'objets chauffés d'un côté décroît, et que finalement le sens de leur mouvement est même interverti, lorsque la densité du gaz augmente progressivement.

A la vérité, cette manière différente dont un objet léger se comporte en présence d'un corps chaud, suivant que le gaz est dense ou raréfié, M. Neesen a cherché à l'expliquer par la direction différente que les courants d'air affectent dans ces deux cas. Mais je ne puis admettre cette explication. La différence de direction des courants proviendrait, en effet, d'une différence de conductibilité pour la chaleur des gaz raréfiés et des gaz plus denses. Or, s'il est vrai qu'en cas de très grande raréfaction la conductibilité pour la chaleur devient plus faible, cela ne rend pourtant pas compte du phénomène dont il s'agit; car, à un degré de raréfaction où la répulsion par un corps chaud peut déjà être très sensible, la conductibilité du gaz pour la chaleur est, d'après les expériences de MM. Kundt et Warburg, encore tout aussi grande qu'à un degré de densité où s'observe une attraction.

Telles sont les raisons qui m'empêchent de regarder l'action directe des courants comme la cause principale des phénomènes observés par M. Crookes.

Parmi les auteurs dont les théories se rattachent à notre troisième classe, c'est de nouveau M. Osborne Reynolds [1]) qui a le premier signalé, comme cause possible des phénomènes de Crookes, l'échange de chaleur entre la surface d'un corps solide et le gaz qui l'avoisine. S'appuyant sur la théorie cinétique des gaz, il pense en effet que, lorsqu'une surface chaude cède de la chaleur à un gaz,

[1]) *l. c.* et *Phil. Trans.*, t. CLXVI, p. 725.

celui-ci exerce sur la surface une pression plus forte; réciproquement, si la surface prend de la chaleur au gaz, elle éprouvera de la part de celui-ci une pression moindre.

Cette proposition, à mon avis, est vraie, mais seulement en partie. Elle n'est applicable, à partir du moment où le gaz vient en contact avec une surface d'une température différente de la sienne, que pendant peu de temps, c'est-à-dire, jusqu'à ce que la conduction de la chaleur ait atteint l'état stationnaire; or cet état devra s'établir assez promptement, à moins que des courants gazeux ne s'y opposent. Mais l'influence de ces courants est ou bien entièrement négligée ou même formellement contestée par les partisans des théories dont il s'agit ici. Nous avons donc affaire, chez eux, à un état stationnaire de la conduction de la chaleur, et pour un pareil état il ne me paraît ni démontré ni probable que le passage de chaleur d'une surface solide à un gaz donne lieu à un surcroît de pression sur cette surface.

M. Clausius a étudié l'état stationnaire de conduction dans un gaz compris entre deux parois planes, parallèles et illimitées, de température différente. Pour ce cas, il a montré que la pression du gaz a partout et dans toutes les directions la même valeur, et que par conséquent il ne saurait être question d'un surcroît de pression du gaz sur la surface chaude. Il est vrai qu'à l'aide des formules établies dans le Mémoire de M. Clausius on trouve, pour la pression dans le sens de la transmission calorifique, une valeur un peu plus petite que pour celle dans les directions perpendiculaires; mais la différence n'est que de l'ordre des grandeurs constamment négligées par M. Clausius, et on ne peut donc y attacher la moindre importance [1]).

[1]) Dans le cahier de déc. 1878 du *Phil. Mag.*, M. Stoney a aussi calculé, au moyen des formules de Clausius, les pressions dans la direction de la conduction de la chaleur et dans les directions perpendiculaires. Les deux premières de ses formules (14) et sa formule (13) sont exactement les mêmes que celles auxquelles j'étais parvenu de mon côté et dont j'avais déduit ce qui est dit dans le texte. Dans le calcul de A_2, M. Stoney a toutefois, si je ne me trompe, commis une erreur, en posant $u^2 r' = \frac{266}{17{,}25} q^2$ au lieu de $= \frac{266}{17 \times 25} q^2$. De là

On pourrait objecter, sans doute, que, si M. Clausius avait procédé avec plus de rigueur, il serait peut-être arrivé à des différences de pression dans les différentes directions, et que, même si ces différences de pression n'existent pas dans le cas très spécial traité par M. Clausius, elles n'en pourraient pas moins se rencontrer dans le cas plus général où la chaleur se propage, par conduction dans un gaz, entre des corps de température différente, limités par des surfaces de forme et de grandeur quelconques. Cela est admissible, assurément; mais l'existence de pareilles différences de pression n'est encore prouvée à aucun degré, et, en fait, je la regarde comme peu probable.

En supposant, d'ailleurs, qu'il fût possible de déduire de la théorie des gaz des différences de pression dans certains états stationnaires de conduction de chaleur, ces différences devraient encore être telles qu'elles suffisent à expliquer les phénomènes de Crookes. Or, je crois pouvoir affirmer que dans le cas traité par M. Clausius, celui de la conduction de chaleur entre deux parois planes, parallèles, d'égale grandeur et de température différente, on ne pourra jamais arriver à de pareilles différences de pression.

En effet, le phénomène qu'il s'agit surtout d'expliquer est celui-ci: qu'une surface solide éprouve une pression plus forte quand elle a une température supérieure à celle du gaz et qu'elle lui cède par conséquent de la chaleur, tandis qu'elle subit une pression moindre quand elle a une température inférieure à celle du gaz et que de la chaleur passe par conséquent de celui-ci à la surface. Mais, pour que cette augmentation ou diminution de la pression sur la surface respectivement plus chaude ou plus froide pût être expliquée par des différences de pression au sein du gaz placé dans les conditions supposées par M. Clausius, il faudrait non-seulement que la pression fût *autre* dans la direction

---

vient qu'il trouve la grandeur A_2 positive, tandis que je l'avais trouvée négative, et qu'il obtient pour la pression dans la direction du flux de chaleur non pas, comme moi, une valeur plus *petite*, mais une valeur plus *grande* que dans les directions perpendiculaires à ce flux.

du flux de chaleur que dans les directions perpendiculaires à celle-ci, mais il faudrait, en outre, que la pression dans la première direction fût au voisinage de la paroi chaude *plus grande* que dans les directions perpendiculaires au flux de chaleur, et au contraire *plus petite* au voisinage de la paroi froide. Or, de pareilles différences de pression ne sont pas admissibles. Même si l'on voulait admettre la possibilité d'une différence de pression dans la direction de la conduction de chaleur et dans les directions perpendiculaires, cette différence devrait avoir toujours le même signe: la pression dans la direction du flux calorifique devrait être soit toujours plus grande soit toujours plus petite que dans les autres directions; quant à croire que cette différence ait en un point du gaz une valeur positive et en un autre une valeur négative, cela me paraît absolument impossible.

Dans le cas étudié par M. Clausius, le gaz ne peut donc pas offrir des différences de pression telles qu'il les faudrait pour rendre compte des phénomènes observés par M. Crookes en présence d'une surface chaude et en présence d'une surface froide.

Mais en serait-il de même dans le cas général, celui où la conduction de la chaleur se fait entre des surfaces de forme quelconque et d'étendue inégale?

Si l'on veut qu'en *toute* circonstance la surface chaude éprouve une pression plus grande, la surface froide une pression moindre, j'estime que, même dans le cas général de conduction, la chose est impossible.

Mais, quand on considère de près les observations de M. Crookes, on reconnaît que, dans la plupart des cas, la surface pour laquelle a été observée une augmentation ou une diminution de pression était la *plus petite* des deux surfaces, de température différente, entre lesquelles avait lieu la conduction de chaleur par le gaz. Or, en admettant que dans ces observations ce soit toujours pour la plus petite qu'a été trouvée une augmentation de pression en cas d'échauffement et une diminution de pression en cas de refroidissement de cette surface, on pourrait peut-être se figurer de la manière suivante des différences de pression capables

d'expliquer les faits observés et dont l'existence ne serait pas à priori absolument impossible.

Tout en reconnaissant que dans le cas traité par M. Clausius, où la conduction de chaleur par le gaz se fait entre deux surfaces inégalement chaudes, parallèles et de *même grandeur*, de semblables différences de pression sont impossibles, et que probablement même aucune espèce de différence de pression ne peut s'y produire dans les différentes directions, on peut supposer qu'il en est autrement lorsque les deux surfaces entre lesquelles la chaleur se transmet à travers le gaz possèdent une *grandeur inégale*. Si, en effet, celle des deux surfaces qui d'abord était la plus chaude est ensuite rendue la plus froide, il en résultera seulement, dans le premier cas, celui de Clausius, une interversion dans le sens de la conduction de la chaleur, ce qui ne saurait avoir pour conséquence un changement de signe de la différence qui peut exister entre la pression suivant la ligne de conduction de la chaleur et celle suivant les directions perpendiculaires à cette ligne. Mais dans le second cas, celui où les deux surfaces sont d'étendue différente, outre le sens de la conduction calorifique, il y a encore autre chose qui change. Si la plus petite des deux surfaces est d'abord la plus chaude et ensuite la plus froide, la chaleur passera, à travers le gaz, la première fois d'une surface plus petite à une surface plus grande, et la seconde fois d'une surface plus grande à une surface plus petite. Or on pourrait se représenter que lorsque la chaleur, en se propageant, se distribue successivement sur des surfaces plus grandes, la pression dans la direction de la propagation fût plus forte que dans les directions perpendiculaires, et qu'elle fût au contraire plus faible dans le premier sens que dans le second lorsque la chaleur se concentre successivement sur des surfaces plus petites. On se rendrait compte, de cette manière, pourquoi une surface, entourée d'une autre surface plus grande, éprouve de la part d'un gaz interposé entre les deux surfaces une pression plus forte ou plus faible, selon qu'elle possède une température plus élevée ou plus basse que la surface enveloppante. Une grande partie des phénomènes décrits par

M. Crookes trouveraient ainsi leur explication. Je doute pourtant que cette explication soit applicable à tous les phénomènes observés; aussi, en ce qui me concerne, ne serais-je nullement tenté d'y avoir recours, tant qu'il ne sera pas démontré qu'aucune autre interprétation des faits n'est possible.

Les considérations qui précèdent ont donc seulement eu pour but, en premier lieu, de montrer qu'il n'est pas encore si facile de trouver des différences de pression à l'aide desquelles on puisse expliquer les phénomènes observés, même quand on ne veut pas contester entièrement et d'une façon générale la possibilité de différences de pression au sein d'un gaz, et, en second lieu, d'indiquer comment, à mon avis, devraient être ces différences de pression pour qu'à leur aide on pût expliquer au moins les phénomènes principaux.

Pour moi, je le répète, l'existence de différences de pression dans l'état stationnaire de conduction de chaleur me paraît improbable, et pour cette raison je ne suis pas porté à me joindre à ceux qui essaient d'expliquer les phénomènes de Crookes par une différence dans la grandeur de la pression que des surfaces de température inégale, telles que les deux faces d'une ailette de radiomètre, éprouvent, dans l'état stationnaire de conduction, de la part du gaz avoisinant.

Dans le cas seulement où le gaz est tellement raréfié que la longueur du chemin moyen des molécules entre deux chocs successifs devient du même ordre que les dimensions du vase dans lequel le gaz est renfermé, il pourra arriver qu'un corps dont la surface ne possède pas partout la même température éprouve de la part du gaz, sur ces parties inégalement chaudes, une pression différente. Alors, en effet, les propositions de la théorie cinétique des gaz ne peuvent plus être appliquées à un espace aussi petit que celui occupé par le gaz dont il s'agit; alors chacune des molécules parcourra l'espace entier, au lieu d'être bornée dans ses mouvements à une partie déterminée de cet espace; alors il ne pourra plus être question d'une différence de densité du gaz dans les différentes parties de l'espace, et les molécules, au moins dans le cas où le chemin moyen devient grand relativement aux

dimensions du vase qui contient la masse gazeuse, arriveront à peu près en nombre égal et avec la même vitesse sur la partie froide et sur la partie chaude de la surface du corps.

Mais les différences de pression qui, pour un gaz aussi raréfié, doivent exister sur des surfaces de température inégale ne peuvent pas servir, comme quelques-uns le pensent, à expliquer les phénomènes de Crookes. La répulsion par les radiations lumineuses et calorifiques a été observée, en effet, à des degrés de raréfaction où la longueur du chemin moyen n'est encore nullement comparable aux dimensions des appareils employés. C'est ainsi que, dans les expériences de M. Finkener [1]), la rotation des ailettes du radiomètre commençait déjà quand l'air avait encore une pression de 3 à 4 mm., pression à laquelle la longueur du chemin moyen n'est que d'environ un cinquantième de millimètre; dans les expériences de M. Crookes, l'attraction observée au sein d'un air dense entre un objet léger et un corps chaud se changeait en répulsion lorsque la densité était diminuée, mais en beaucoup de cas l'interversion se produisait à des pressions s'élevant encore à 50 mm. et même davantage [2]).

Bien que je n'aie pu examiner ici séparément, comme cela a eu lieu dans mon Mémoire original, chacune des théories émises à propos du radiomètre, j'espère que ce qui en a été dit suffira à faire comprendre pourquoi je ne puis donner mon adhésion à aucune d'entre elles. Il reste donc à voir, et c'est là l'objet de la seconde partie de mon travail, s'il ne serait pas possible de trouver quelque autre cause pouvant rendre compte des observations de Crookes. Dans cette recherche, toutefois, nous devrons aborder un ordre de phénomènes encore très peu connu et dont, en conséquence, la théorie est encore très peu développée. Il s'agit de savoir, en effet, ce qui arrive lorsqu'une masse gazeuse vient en contact avec une surface solide possédant une température différente, et notamment ce qui arrive dans les premiers instants,

[1]) *Pogg. Ann.*, t. CLVIII, p. 572.

[2]) *Phil. Trans.*, t. CLXV, p. 541.

avant que l'état stationnaire de conduction calorifique ne soit établi au sein du gaz. Cet état transitoire, dans lequel la masse gazeuse se trouve temporairement, ne se prête pas jusqu'ici à une étude rigoureuse, et cela pour deux raisons principales. Tandis que la théorie cinétique des gaz donne de beaucoup de problèmes une solution précise, quand ces problèmes se rapportent à un état stationnaire du gaz, il n'en est plus de même des questions beaucoup plus difficiles et plus compliquées qui concernent les états non-stationnaires ou de transition. Mais, lors même que l'analyse mathématique ne serait pas ici impuissante dans la plupart des cas, la solution rigoureuse des problèmes n'en resterait pas moins impossible en général, parce que nous savons encore si peu de chose quant à la manière dont se font les échanges de mouvement entre les molécules du gaz et celles du corps solide. On comprendra donc aisément que je ne veuille pas attribuer une certitude absolue mais tout au plus un certain degré de probabilité aux idées que je vais exposer touchant cet état de transition, et que, loin de considérer l'application de ces idées au radiomètre comme une théorie complète, j'entende seulement la présenter comme un essai d'explication de ces phénomènes encore si obscurs.

Ainsi que nous avons eu l'occasion de le remarquer en parlant de la seconde théorie de M. Osborne Reynolds, un gaz qui vient en contact avec une surface solide à température plus élevée que la sienne exercera temporairement sur cette surface une pression plus forte. Pareillement, un gaz qui vient en contact avec une surface solide à température plus basse que la sienne exercera temporairement sur cette surface une pression plus faible. Dès que s'est établi l'état stationnaire de conduction calorifique, cette augmentation ou cette diminution de pression cesse, et la pression normale à la surface devient égale à la pression parallèle à cette surface.

Mais si, comme ce doit être le cas je pense dans le radiomètre et dans les autres appareils de M. Crookes, cet état stationnaire

est empêché de se produire, par suite des courants que les différences de température font naître en même temps dans la masse gazeuse, les parties de la surface des corps solides pourront continuer, suivant qu'elles sont plus chaudes ou plus froides que le gaz ambiant, à subir de la part de celui-ci une pression plus forte ou plus faible, et telle sera peut-être la cause des phénomènes observés par M. Crookes sur les objets légers soumis à l'influence du rayonnement.

Nous admettons donc que, lorsqu'un gaz entre en contact avec une surface solide à température plus haute ou plus basse, il exerce sur elle pendant quelque temps une pression plus grande ou plus petite; et nous allons examiner, en premier lieu, si par là se laissent réellement expliquer les mouvements constatés jusqu'à ce jour dans les radiomètres. Nous ne devrons pas perdre de vue que ce changement de pression du gaz n'est qu'un effet temporaire, et qu'on peut seulement en faire une force motrice continue en admettant que le gaz voisin de la surface solide est incessamment renouvelé par des courants. Il en résulte nécessairement que l'action de ce changement de pression sera d'autant plus grande que les courants gazeux pourront se produire avec plus d'énergie le long de la surface solide. Nous admettrons, de plus, que cette action sur la surface solide augmente à mesure que la température du gaz, au voisinage de la surface, change plus rapidement.

Dans le radiomètre ordinaire à ailettes planes verticales, et dans les appareils employés par M. Crookes pour mesurer la force avec laquelle une lamelle verticale paraît être repoussée par les radiations lumineuses et calorifiques, la différence de pouvoir absorbant des deux faces de la lamelle est la cause première de cette force répulsive apparente des rayons de chaleur. Chacune des deux faces de la lamelle acquiert par le rayonnement une température supérieure à celle du gaz ambiant; le long de chacune de ces deux faces naîtront donc des courants dans le gaz. Ces masses gazeuses ascendantes enlèveront de la chaleur à la lamelle, et se trouveront ainsi passagèrement dans l'état de

transition, pendant lequel elles exercent sur la lamelle une pression plus forte. Ce surcroît de pression des courants gazeux ascendants n'aura toutefois pas la même valeur aux deux côtés de la lamelle, mais sera plus grand au côté qui possède la température la plus élevée. D'abord, parce que l'action du surcroît de pression pendant l'état transitoire est d'autant plus forte que la température de la surface solide diffère plus de celle de l'enveloppe du radiomètre, vu que la chute de température au sein du gaz prend alors une valeur plus grande; et, en second lieu, parce que les courants gazeux auront au côté chaud une vitesse plus grande. La différence entre les surcroîts de pression ainsi obtenus sur les deux faces de la lamelle doit être regardée, d'après les vues ci-dessus émises, comme la force qui se manifeste dans les appareils de Crookes et qui met en mouvement les ailettes du radiomètre.

Mais le cas peut aussi se présenter que la lamelle se refroidit par rayonnement au-dessous de la température du gaz ambiant, et alors le gaz qui est en contact avec la lamelle participera à son refroidissement, en lui cédant de la chaleur. La conséquence sera que le gaz exercera sur la lamelle une pression moindre que lorsqu'il ne lui abandonnait pas de chaleur, et comme le gaz est constamment renouvelé à la surface de la lamelle par des courants descendants, la cause de cette diminution de pression agira d'une manière continue, tant que la température de la lamelle restera inférieure à celle du gaz ambiant. Si maintenant l'une des faces de la lamelle possède un plus grand pouvoir émissif que l'autre, la première se refroidira davantage; la pression sur la première face diminuera plus que sur la seconde, et par conséquent il se produira, ici aussi, une différence de pression pouvant agir comme force motrice. De même que dans le cas précédent, cette force agira sur le côté le plus chaud ou le moins refroidi de la lamelle.

De cette manière s'expliquent, je pense, tous les mouvements d'un radiomètre dont les deux faces des ailettes exercent un pouvoir absorbant différent sur les rayons qui les frappent. On ne doit pas oublier, toutefois, que lorsqu'une des faces possède

pour des rayons d'une certaine longueur d'onde un plus grand pouvoir absorbant que l'autre, il se peut que ce soit tout l'inverse pour des rayons d'une autre longueur d'onde.

Dans les cas considérés jusqu'ici, les ailettes acquéraient une température soit plus haute soit plus basse que celle du gaz ambiant, et en conséquence c'était de leur surface que partaient les courants gazeux ascendants ou descendants. Mais si on donne à l'enveloppe du radiomètre une température supérieure ou inférieure à celle du gaz inclus, l'enveloppe sera le lieu où naîtront les courants. En supposant un radiomètre ordinaire, à ailettes planes et verticales de mica ou d'aluminium, recouvertes de noir de fumée sur l'une de leurs faces, on voit, dans le cas où l'enveloppe est plus chaude que son contenu, se produire un mouvement soi-disant anormal, c'est-à-dire qu'on voit tourner les ailettes la face noire en avant. Ce fait peut être expliqué de deux manières différentes. Premièrement, il n'est pas impossible que, pour les rayons calorifiques obscurs émanés de l'enveloppe en verre, le noir de fumée possède moins de pouvoir absorbant que la surface non noircie de l'aluminium ou du mica. Ce dernier côté de l'ailette s'échaufferait alors plus que le côté noirci, et par suite éprouverait une plus grande pression de la part du gaz relativement froid. Les ailettes devraient donc prendre une rotation anormale. Mais une seconde explication est également possible. A raison de la température plus élevée de l'enveloppe, le gaz en contact avec elle s'échauffe et des courants y prennent naissance. Lorsque cette masse gazeuse échauffée par l'enveloppe arrive sur les ailettes, elle leur cède de la chaleur; mais comme le côté noirci offre, à cause de ses aspérités, une surface plus grande que le côté lisse opposé, le premier absorbera plus vite la chaleur du gaz, d'où il résultera que les courants passeront dans une plus forte mesure sur le côté noirci que sur le côté brillant des ailettes. Le passage de chaleur du gaz à l'ailette sera donc plus actif au côté noirci, la pression devra par suite éprouver à ce côté une diminution plus forte, et la rotation anormale en sera la conséquence nécessaire.

Dans le cas qui vient d'être décrit, il est difficile de décider laquelle des deux explications est la vraie. Mais il est d'autres cas où la seconde interprétation peut seule rendre compte des phénomènes. M. Stokes a observé [1]) que lorsque les ailettes consistaient en lamelles métalliques dont une des faces était lisse, tandis que l'autre avait été ou bien rayée avec un couteau aigu ou bien recouverte par voie électrolytique d'une mince couche de métal finement divisé, cette dernière face, la plus rugueuse des deux, jouait le rôle de la face noire dans le radiomètre ordinaire. Il ne peut être question ici d'une différence de température entre les deux côtés d'une ailette entièrement composée de métal. Mais le côté rugueux possède par suite de ses inégalités une plus grande surface que le côté lisse, et doit donc enlever ou céder plus vite de la chaleur au gaz avoisinant; les courants gazeux se dirigeront ainsi en proportion plus forte le long du premier côté, et par conséquent le changement de pression, déterminé par l'échange de chaleur entre l'ailette et le gaz, sera le plus grand au côté rugueux. Si la température des ailettes par les radiations absorbées s'élève au-dessus de celle du gaz ambiant, les ailettes se mettront donc à tourner, la face rugueuse en arrière. Si au contraire le rayonnement abaisse la température des ailettes au-dessous de celle du gaz, il devra se produire une rotation telle que la face rugueuse soit tournée en avant.

Je me suis borné ici à considérer les radiomètres à ailettes planes verticales; mais, dans le Mémoire original, mon explication a aussi été étendue aux différentes autres formes de radiomètres construites jusqu'ici. Pour montrer comment ma manière de voir s'applique aux phénomènes observés dans le cas où les ailettes ne sont pas planes, je dirai seulement encore un mot des radiomètres à ailettes courbes.

On a en effet donné aux ailettes la forme d'hémisphères creux, de cônes creux ou de demi-cylindres creux. Bien qu'alors les deux surfaces, au moins si les ailettes consistent en une lame

[1]) *Nature*, 17 janv. 1878, t. XVII, p. 234.

d'aluminium mince et polie des deux côtés, ne diffèrent que par la forme, mais sont parfaitement semblables quant à leur nature et à leur pouvoir absorbant, bien qu'il ne puisse être question alors d'une différence de température de ces deux surfaces, les ailettes ne s'en mettent pas moins à tourner sous l'influence du rayonnement. Le côté convexe joue le rôle du côté noirci et plus absorbant d'un radiomètre ordinaire. Lorsque, par exemple, exposées à l'action de la lumière, les ailettes prennent une température plus élevée que celle du gaz ambiant, elles tournent de façon que le côté concave soit en avant.

D'après notre manière de voir, la vraie cause de ce mouvement consiste encore en ce que la transmission de chaleur entre les ailettes et le gaz n'est pas également active aux deux côtés des ailettes. Les courants que la température plus élevée de l'ailette fait naître dans le gaz apparaîtront, en effet, en plus forte proportion au côté convexe qu'au côté concave, attendu que l'air ascendant peut glisser plus facilement sur le premier que sur le second, où il est plus ou moins retenu dans la concavité. En outre, le côté convexe est, au moins en partie, plus tourné vers l'enveloppe froide du radiomètre, et, tant pour cette raison que par suite de la forme courbée de l'ailette, la chute de température dans le gaz devra être plus forte au côté convexe qu'au côté concave. Le surcroît de pression devra donc aussi avoir une valeur plus grande au premier côté qu'au second, et cette inégalité de pression sur les deux côtés de l'ailette est la force qui la met en mouvement.

C'est notre conviction que tous les phénomènes observés se laissent expliquer par l'action indirecte attribuée ci-dessus aux courants gazeux, tandis que plusieurs de ces phénomènes ne trouvaient dans aucune des théories antérieures une explication naturelle. Nous avons maintenant à examiner si le changement temporaire qu'éprouve, durant l'état transitoire, la pression de la masse gazeuse qui arrive au contact de la surface solide d'une température différente du gaz, si ce changement, dis-je,

est théoriquement tel que l'exige l'explication des phénomènes

Pour qu'il en soit ainsi, il faut, en premier lieu, que ce changement de la pression ne décroisse pas trop fortement à mesure que décroît la densité du gaz. Je dis à dessein que ce changement de la pression ne doit pas décroître trop fortement, je ne dis pas qu'il doive croître. Car je ne pense pas qu'un accroissement de ce changement, à mesure que la raréfaction augmente, soit absolument nécessaire pour expliquer les phénomènes. A la vérité, ceux-ci ne se manifestent énergiquement que dans un gaz très raréfié, et en cas de densité plus grande il se produit même des phénomènes de sens contraire; mais je crois que cela pourrait s'expliquer en admettant deux actions opposées, dont l'une donnerait naissance aux phénomènes qui apparaissent dans un gaz plus dense, l'autre aux phénomènes observés dans un gaz très raréfié. Or si l'on suppose que la première de ces actions soit proportionnelle à la densité et par conséquent décroisse fortement avec elle, il sera à proprement parler suffisant, pour l'explication des phénomènes en cas de densité faible, que la seconde action diminue moins rapidement que la première; une augmentation de cette action n'est pas une condition de rigueur.

En second lieu, beaucoup de phénomènes semblent indiquer que le gaz qui se meut le long d'une surface plus chaude ou plus froide exerce sur cette surface une action d'autant plus forte, que la température du gaz au voisinage de la surface varie plus rapidement avec la distance. Cette action plus forte se laisserait peut-être expliquer par la circonstance que les courants gazeux se produisent avec plus d'énergie pour une grande que pour une petite chute de température dans le gaz, parce que dans le premier cas il y a une plus grande différence de température et par conséquent aussi de densité entre des volumes de gaz situés à une même distance l'un de l'autre; peut-être aussi s'expliquerait-elle par la considération que le gaz qui afflue vers la surface possédera, au moment où il vient à la toucher, une température d'autant plus différente de celle de cette surface que la chute de tempé-

rature a une valeur plus grande. Bien qu'il ne soit donc pas absolument nécessaire d'admettre que la variation de pression dans le gaz pendant l'état transitoire croisse avec la grandeur de la chute de température dans le gaz, nous voulons pourtant examiner jusqu'à quel point un accroissement de cette variation se laisse déduire de la théorie.

Dans les considérations que nous allons présenter au sujet de l'état de transition où se trouve temporairement le gaz qui vient se mettre en contact avec la surface solide, nous nous bornerons provisoirement au cas où cette surface possède une température supérieure à celle du gaz. Durant cet état de transition, le gaz exercera, d'après la théorie cinétique des gaz, un surcroît de pression sur la surface solide. Ce surcroît de pression résulte, en premier lieu, de ce que les molécules qui viennent heurter la surface plus chaude sont animées, en la quittant, d'une force vive plus grande que si la surface avait eu la même température que le gaz, tandis qu'au début la densité du gaz en contact avec la surface n'a pas encore baissé, par l'influence de la température supérieure, jusqu'à la valeur qu'elle prendra plus tard, lorsque l'état sera devenu stationnaire. En d'autres termes, le nombre des molécules qui dans l'unité de temps rencontrent la surface sera au début encore en rapport avec la densité primitive et plus grande du gaz, et il ne s'abaissera que peu à peu à la valeur moindre à laquelle ce nombre est réduit ultérieurement dans l'état stationnaire; mais la force de chaque choc sera plus grande que celle qui correspondrait à la température primitive du gaz, parce que la surface, à raison de sa température plus élevée, communique une plus grande quantité de mouvement aux molécules qui la rencontrent.

Mais il y a encore une autre raison pour laquelle le gaz exerce au commencement une pression plus forte sur la surface chaude. L'état stationnaire une fois établi, la vitesse et le nombre relatif des molécules gazeuses qui se meuvent simultanément dans une certaine direction seront tels que la

pression soit la même partout et dans tous les sens [1]). Les vitesses des molécules auront alors dans les différentes directions des valeurs telles, que la valeur moyenne de la vitesse dans une direction perpendiculaire à la direction de la conduction calorifique soit la moyenne arithmétique des deux vitesses contraires que les molécules possèdent dans le sens de la conduction calorifique et dans le sens directement opposé. Mais au début cela n'est pas encore le cas; il faut un certain temps, d'ailleurs assez court peut-être, avant que les vitesses se soient distribuées sur les différentes directions comme il convient à l'état stationnaire final. Pendant l'intervalle de transition, la moyenne arithmétique des deux vitesses opposées dans la direction de la conduction calorifique sera plus grande que la vitesse dans les directions perpendiculaires à celle-ci, et pour cette raison la pression du gaz sera aussi plus grande dans la première de ces directions que dans les directions qui lui sont perpendiculaires.

Les choses se passent d'une manière analogue, pendant l'état de transition, en ce qui concerne le nombre relatif des molécules distribuées sur les différentes directions. Au début, lorsque le gaz a encore partout la même température, des molécules qui se trouvent au même instant dans un certain espace un même nombre se mouvra dans chaque direction. Plus tard, dans l'état stationnaire de conduction calorifique, celles de ces molécules qui se dirigent vers la surface chaude seront au contraire plus nombreuses que celles qui suivent une direction inverse. Peu à peu l'un des états se changera en l'autre. Durant l'état de transition, le nombre des molécules qui s'éloignent de la surface chaude sera donc relativement plus grand, et le nombre des molécules qui se rapprochent de la surface chaude relativement plus petit, que cela ne sera le cas ultérieurement, dans l'état stationnaire. Par conséquent, tant que la distribution du nombre relatif des molécules sur les différentes directions n'est pas encore devenue celle qui correspond

[1]) Nous avons ici en vue le cas de conduction calorifique traité par M. Clausius, parce que ce cas est le seul qui ait été étudié d'une manière assez complète pour que notre recherche puisse s'y appuyer.

à l'état stationnaire final, il passera, à travers chaque plan perpendiculaire à la direction de la conduction calorifique, plus de molécules allant du côté chaud au côté froid, que de molécules allant en sens inverse [1]). Mais les molécules qui traversent le plan en plus grand nombre possèdent une plus grande vitesse que les autres, parce que les premières viennent du côté de la surface chaude. Par conséquent, ce que M. Clausius nomme la quantité de mouvement positive qui par unité de temps traverse le plan dans le sens positif, autrement dit la pression sur le plan, est plus grande que dans l'état initial ou dans l'état final du gaz, où les molécules traversent le plan en nombre égal dans les deux directions. Durant l'état de transition il devra donc exister aussi pour cette raison une pression plus grande dans la direction de la conduction calorifique.

En résumé, ni la densité ni la distribution de la vitesse et du nombre relatif des molécules sur les différentes directions ne sont immédiatement telles, dans le gaz venant en contact avec la surface chaude, qu'elles devront l'être plus tard, quand sera établi l'état stationnaire final; double raison pour laquelle la surface chaude éprouvera temporairement un surcroît de pression de la part du gaz. Pendant l'état transitoire le gaz se rapprochera peu à peu, en ce qui concerne à la fois cette densité et cette distribution, de l'état stationnaire, et par suite l'excès de pression sur la surface chaude diminuera graduellement et finira par disparaître entièrement.

Il se pourrait maintenant que le surcroît de pression, qui résulte de ce que la distribution de la vitesse et du nombre relatif des molécules sur les différentes directions n'est pas d'emblée celle qui convient à l'état stationnaire de conduction calorifique, mais n'y arrive que par degrés, il se pourrait, dis-je, que ce surcroît de pression eût ou bien une valeur plus grande, ou bien

[1]) C'est là aussi la raison pour laquelle, au voisinage de la surface chaude, le gaz, durant l'état de transition, se dilate peu à peu et prend une densité plus faible.

une durée plus longue, à mesure que la distribution susdite doit éprouver un changement plus marqué, c'est-à-dire, à mesure que dans l'état stationnaire final elle diffère plus de la répartition uniforme sur toutes les directions, qui caractérise les masses gazeuses dont la température, la densité et la pression sont partout les mêmes.

Or, dans le cas particulier de conduction calorifique traité par M. Clausius, celui-ci est arrivé à des formules qui montrent que la distribution dans l'état stationnaire s'écarte d'autant plus de la distribution uniforme qu'il y a une plus grande chute de température dans le gaz, d'autant plus, par conséquent, que les deux surfaces, entre lesquelles la chaleur est conduite par le gaz, diffèrent plus en température ou sont sont plus rapprochées l'une de l'autre. Et, en second lieu, M. Clausius trouve cet écart entre la distribution dans l'état stationnaire et la distribution uniforme, d'autant plus grand que le gaz est plus raréfié. D'après cela, bien que le surcroît temporaire de pression du gaz sur la surface chaude pendant l'état de transition doive diminuer à mesure que diminue la densité du gaz, parce que le nombre des molécules qui atteignent la surface dans l'unité de temps diminue proportionnellement à la densité, il serait possible que l'action totale de ce surcroît de pression ne diminuât *pas* durant l'état de transition. Cela pourrait alors être attribué ou bien à ce que le surcroît de pression, qui pour la raison susdite diminue avec la densité, augmente tout juste de la même quantité à raison de la valeur plus grande du changement opéré dans la distribution, de sorte que la grandeur de ce surcroît de pression serait en somme indépendante de la densité du gaz; ou bien à ce que la durée de l'état transitoire devient d'autant plus longue que le gaz devient moins dense, de sorte que la diminution du surcroît temporaire de pression serait alors compensée par l'augmentation du temps pendant lequel ce surcroît de pression continue à agir.

Dans mon Mémoire, je suis arrivé à la conclusion qu'il est, sinon impossible, du moins *peu probable* que l'écart plus grand de la distribution uniforme ait de l'influence soit sur la grandeur

du surcroît temporaire de pression pendant l'état transitoire, soit sur la durée de cet état. Après nouvel examen, toutefois, j'incline à croire que je m'étais trop avancé et que la question doit rester provisoirement ouverte. Je n'ose plus décider si les probabilités sont pour ou contre l'influence dont il s'agit. En tout cas, son existence ne me paraît pas impossible.

Mais il y a encore d'autres raisons pour lesquelles je ne regarde pas comme impossible qu'au moins la durée de l'état stationnaire augmente à mesure que la densité diminue.

La surface chaude cède de la chaleur au gaz plus froid qui arrive en contact avec elle, parce que les molécules gazeuses, en heurtant la surface, prennent la force vive plus grande qui correspond à la température plus élevée de cette surface. En quittant la surface, les molécules gazeuses emportent cette force vive, et elles la conserveront jusqu'à ce qu'elles rencontrent d'autres molécules plus froides. La distance moyenne à laquelle cela aura lieu, comptée à partir de la surface, sera proportionnelle à la longueur du chemin moyen des molécules, et par conséquent inversement proportionnelle à la densité du gaz. Dans cette rencontre, les molécules céderont une partie de leur excès de force vive à des molécules qui sont plus éloignées de la surface chaude; celles-ci, à leur tour, transmettront une partie de ce qu'elles ont gagné à d'autres molécules encore plus éloignées, et ainsi de suite.

Le surplus de force vive communiqué aux molécules par la surface solide se répandra donc très rapidement dans le gaz, et en un temps déterminé fera sentir son action à une distance de la surface qui dépend de la vitesse avec laquelle les molécules se meuvent, mais qui est indépendante de la densité du gaz. Sur cette distance, les molécules auront toutefois produit des chocs d'autant plus nombreux que le gaz est plus dense. Et comme à chaque choc une partie seulement du surplus de force vive est transmise, l'action de la température plus élevée de la surface se fera sentir, à cette distance, moins fortement dans le gaz dense que dans le gaz plus dilaté. Par conséquent,

l'influence de cette température plus élevée sera encore sensible, après un temps déterminé, à une distance d'autant plus grande de la surface que le gaz aura moins de densité.

Cela, toutefois, n'implique pas encore que l'état stationnaire sera atteint plus vite dans le gaz rare que dans le gaz plus dense. Le gaz immédiatement voisin de la surface chaude arrivera, au contraire, en cas de densité supérieure plus rapidement qu'en cas de densité moindre à un état où la répartition de la vitesse et du nombre relatif des molécules sur les différentes directions diffère peu de ce qu'elle est dans l'état stationnaire de conduction calorifique, et où, par conséquent, le surcroît de pression occasionné par la transmission de chaleur est presque réduit à zero.

Les molécules qui ont reçu de la surface chaude un surcroît de force vive, avec lequel elles l'ont quitté, seront de nouveau lancées vers la surface après qu'elles auront choqué d'autres molécules [1]; mais alors leurs vitesses ne seront plus, comme précédemment, les mêmes pour toutes les directions, et en outre les molécules ne se mouvront plus en nombre égal dans tous les sens. La répartition de la vitesse et du nombre sur les différentes directions se rapprochera déjà un peu de la répartition propre à l'état stationnaire, et par conséquent, à leur seconde rencontre avec la surface chaude, les molécules n'exerceront plus sur elle le même surcroît de pression qu'à la première rencontre, mais un surcroît un peu moindre. Lorsque les molécules auront pris pour la seconde fois de la chaleur à la surface solide, elles seront de nouveau renvoyées vers elle après leur choc avec d'autres molécules, et elles se trouveront alors dans un état qui différera encore un peu moins de l'état stationnaire final que lorsqu'elles retournaient pour la première fois vers la surface solide. A chaque retour ultérieur cette différence deviendra plus petite, de sorte que sa valeur dépendra du nombre de fois que les molécules auront quitté la surface et auront été repoussées vers elle. Or, entre deux chocs successifs des molécules contre la surface, il

[1]) Elles sont ou bien repoussées elles-mêmes vers la surface chaude, ou bien leur rôle est repris par les molécules avec lesquelles elles ont été en collision.

s'écoule un temps qui est proportionnel au chemin parcouru par les molécules à l'aller et au retour, et qui par conséquent, en moyenne, est proportionnel aussi à la longueur du chemin moyen. Le temps nécessaire pour réduire à une valeur déterminée la différence d'avec l'état stationnaire, dans le gaz qui confine à la surface chaude, sera donc proportionnel à la longueur du chemin moyen, ou inversement proportionnel à la densité du gaz. La durée de l'état transitoire du gaz venant en contact avec la surface chaude sera donc en raison inverse de la densité du gaz [1]), et pour cette raison l'effet total du surcroît de pression durant l'état transitoire n'aura pas besoin de diminuer avec la densité du gaz, ou du moins il ne diminuera que dans une proportion beaucoup moindre.

Jusqu'ici nous avons toujours considéré le cas où la surface possède une température plus élevée que l'enceinte. Mais ce qui a été trouvé pour ce cas s'applique aussi, *mutatis mutandis*, à celui où la surface est moins chaude que les corps environnants, et où par conséquent elle prend de la chaleur au gaz, au lieu de lui en céder. Le gaz se refroidira alors au contact de la surface, et de là naîtront des courants gazeux descendants. Ceux-ci exerceront durant l'état stationnaire une pression moindre sur la surface, et la grandeur de cette *diminution* de pression, ainsi que sa durée, dépendront tout à fait des mêmes circonstances dont dépendent, dans le cas ci-dessus étudié en détail, la grandeur et la durée de l'*augmentation* de pression.

Pour que l'action indirecte des courants gazeux, telle que nous l'avons conçue dans ce qui précède, puisse être regardée comme

[1]) Je ne donne toutefois ce résultat que comme probable; de même qu'à tous les autres résultats que j'ai exposés concernant l'état stationnaire. la certitude absolue lui manque. Car, bien que le surcroît de pression sur la surface chaude soit déterminé par l'état de mouvement des molécules gazeuses voisines de la surface, les molécules plus éloignées auront pourtant aussi de l'influence sur cet état de mouvement et par conséquent sur le surcroît de pression; or je n'oserais affirmer que j'aie tenu suffisamment compte de cette influence.

la cause des phénomènes observés par M. Crookes, il faut que ces courants ne diminuent pas fortement en intensité à mesure que diminue la densité du gaz. Il nous reste à examiner si tel est le cas.

La force qui produit les courants est la différence de poids entre deux volumes de gaz égaux et adjacents. Cette force est donc proportionnelle à la différence de densité qui provient de ce que l'un des volumes de gaz acquiert une température supérieure à celle de l'autre. Appelons t et t_1 les deux températures, d et d_1 les densités qui leur correspondent, α le coefficient de dilatation du gaz; on a alors l'expression

$$\frac{d - d_1}{d} = \frac{\alpha (t_1 - t)}{1 + \alpha t},$$

à laquelle est proportionnelle la force qui agit, par suite de la différence de température $t_1 - t$, sur l'unité de masse. Cette force est donc indépendante de la densité. Si maintenant il en était de même des forces qui s'opposent aux courants, ceux-ci devraient avoir la même intensité quelle que soit la densité du gaz.

Dans le gaz lui-même, la force opposante est le frottement interne. Or, d'après la théorie comme d'après l'expérience, le coefficient de frottement interne est indépendant de la densité, d'où il suit que le frottement interne contrariera plus les courants en cas de densité faible qu'en cas de densité forte. La vitesse des courants, au sein du gaz, devra donc diminuer en même temps que diminuera la densité du gaz. Mais, de ce que les courants s'affaiblissent à l'intérieur du gaz, il ne résulte pas encore qu'il en soit de même de ceux qui rasent la surface solide. MM. Kundt et Warburg ont montré que le long de la surface solide il s'opère un glissement des molécules gazeuses, qui est très faible dans l'état normal de densité du gaz, mais qui devient successivement plus fort quand la densité décroît. La partie du gaz qui confine à la surface participera donc de plus en plus aux courants à mesure que la densité diminuera, et pour cette partie, que nous avons spécialement en vue dans notre théorie, il ne sera donc pas nécessairement vrai que les courants décrois-

sent avec la densité. Tout au moins, la vitesse des courants y diminuera beaucoup moins fortement qu'à l'intérieur de la masse gazeuse.

Avant de finir je rappellerai encore une fois, pour qu'on ne risque pas de l'oublier, que dans toutes les considérations ici développées la densité du gaz n'a jamais été conçue réduite à ce degré extrême où les dimensions de la plaque chaude ou froide, ou celles de la masse gazeuse qui conduit la chaleur, seraient du même ordre de grandeur que la longueur du chemin moyen des molécules. J'ai toujours supposé que les propositions de la théorie cinétique des gaz étaient encore entièrement applicables à la masse gazeuse; or cela n'est plus le cas lorsque les dimensions de cette masse ne sont qu'un multiple assez faible de la longueur du chemin moyen.

En jetant maintenant un coup d'œil rétrospectif sur tout ce qui précède, je crois pouvoir dire que les phénomènes observés par M. Crookes trouvent dans la cause admise par moi une explication meilleure et plus complète que dans aucune des théories antérieures. Quant à la question de savoir si cette cause peut aussi être considérée comme suffisante au point de vue de la théorie des gaz, le résultat de notre examen a été moins satisfaisant. A la vérité, d'après cette théorie, l'existence de la cause ne me paraît pas douteuse; mais, vu l'extrême imperfection de nos connaissances actuelles au sujet de l'état de transition et au sujet de la manière dont la chaleur est communiquée par une surface solide à un gaz, il était encore impossible de prouver que le changement de pression du gaz pendant l'état de transition a une grandeur et une durée suffisantes pour qu'on puisse lui attribuer les phénomènes de Crookes. Pour la même raison, il n'a pas non plus pu être démontré rigoureusement que l'action totale de ce changement de pression ne diminue pas trop rapidement avec la densité du gaz pour que, à son aide, on puisse expliquer les mouvements du radiomètre dans un gaz très dilaté.

Mais, s'il n'est pas encore certain que, d'après la théorie, l'action indirecte des courants gazeux suffise à rendre compte des phénomènes, il y a pourtant des indications qui rendent la chose assez probable.

Dans le cas, toutefois, où une étude plus approfondie ferait reconnaître l'insuffisance de l'explication que j'ai proposée, il ne resterait d'autre ressource, je crois, que de tâcher d'établir l'existence de différences de pression *permanentes* dans le gaz. Pour le moment, cette existence ne me semble prouvée par rien, et c'est là surtout ce qui m'a conduit à chercher une autre cause pour les phénomènes de Crookes. Du reste, en supposant qu'on parvienne à mettre hors de doute la réalité de pareilles différences de pression dans l'état stationnaire de conduction de chaleur, on devra montrer aussi qu'elles sont telles que l'exige l'explication des phénomènes; et j'estime qu'alors elles devront concorder, au moins dans leurs traits principaux, avec celles qui ont été décrites ci-dessus, pp. 104—107. A l'aide de telles différences de pression, les mouvements des ailettes des radiomètres de la forme ordinaire se laisseraient très bien expliquer, et il en serait de même d'une grande partie des mouvements offerts par les radiomètres à ailettes courbes. Mais qu'on puisse rendre compte, de cette manière, de tous les phénomènes rappelés dans mon Mémoire, c'est ce qui me semble très douteux.

A la fin de mon Mémoire, j'ai encore traité succinctement des phénomènes qui se passent dans les gaz denses. Au-dessus d'un certain degré de densité, appelé le point neutre, M. Crookes a obtenu des actions précisément inverses de celles qu'il avait observées en cas de densité moindre. Le mouvement d'une lamelle verticale, dont l'une des faces acquiert une température plus haute ou plus basse que celle de l'enceinte, se fait, dans un gaz dense, comme si cette face éprouvait une pression moindre quand elle est plus chaude que le gaz, et au contraire une pression plus grande quand sa température s'abaisse au-dessous de celle du gaz.

Je ne puis attribuer ce mouvement de la lamelle à l'action impulsive directe des courants gazeux; car, en premier lieu, ces courants suivent en majeure partie une direction verticale près de la lamelle, et ils ne peuvent donc avoir pour effet un mouvement horizontal; en second lieu, si même on admet avec M. Neesen que le mouvement est produit par des courants horizontaux, il reste inexpliqué, — comme je crois l'avoir montré dans ma critique de la théorie de M. Neesen, — pourquoi la lamelle se meut dans des sens différents suivant que l'une des faces a une température plus haute ou plus basse que celle de l'enceinte. Je pense donc que, pas plus dans le gaz dense que dans le gaz rare, l'action impulsive directe des courants n'est la cause du mouvement de la lamelle; je suis seulement disposé à attribuer en grande partie à ces courants la régularité moindre que les phénomènes présentent dans l'air dense.

Lorsqu'un gaz se meut, il exerce dans la direction du courant une pression plus grande que dans les directions perpendiculaires. Mais cette différence de pression suivant les différentes directions ne peut pas non plus nous donner la cause de mouvement que nous cherchons. Par l'élévation de température de l'un des deux côtés de la lamelle, nous obtenons le long de ce côté un courant d'air ascendant; par l'abaissement de température, un courant descendant. Mais, que ce courant soit ascendant ou descendant, dans les deux cas il devra exercer sur la lamelle une pression plus faible. Soit que nous échauffions l'une des faces de la lamelle au-dessus de la température ambiante, soit que nous la refroidissions au-dessous, l'action de l'air qui se meut le long de la lamelle sera toujours la même, à savoir, une diminution de la pression que supporte la lamelle. Dans les deux cas, la lamelle devrait donc sous cette influence se mouvoir dans le même sens, tandis que les expériences ont montré qu'elle prend des mouvements de sens opposé.

Pour expliquer les mouvements dont il s'agit ici, nous avons besoin d'une cause qui change de signe lorsque l'élévation de température est remplacée par un abaissement de température.

La seule cause satisfaisant à cette condition que je puisse découvrir, est la suivante [1]).

Dans un gaz dont la température est partout la même et qui est soustrait à l'action de la pesanteur, la densité et la pression auront la même valeur dans toute la masse gazeuse. L'intervention de la pesanteur apportera à cet état de choses un changement, consistant en ce que les deux grandeurs en question croîtront à mesure qu'on descendra plus bas dans la masse de gaz. Dans chaque couche horizontale, la pression et la densité auront partout la même valeur; mais si l'on considère deux couches situées à des hauteurs différentes, la pression dans la plus basse surpassera celle dans la plus haute de tout le poids du gaz compris entre les deux couches, et la densité, qui est toujours proportionnelle à la pression, devra également être plus grande dans la couche inférieure. S'il y a dans le gaz une plaque verticale, les parties des deux faces de cette plaque qui se trouvent dans une même couche horizontale éprouveront une pression égale de la part du gaz.

L'une des faces de la plaque étant maintenant échauffée, tandis que l'autre conserve la température initiale, l'air qui touche au côté chaud de la plaque participera à cet échauffement; par suite il se dilatera et sa densité diminuera. Les parties situées dans une même couche horizontale n'éprouveront alors plus la même pression aux deux côtés de la plaque: la pression sera moindre au côté chaud, parce que, de ce côté, la partie de la pression qui est occasionnée par le poids de l'air situé au-dessus du point considéré sera devenue plus petite, cet air s'étant dilaté par l'échauffement et étant ainsi devenu plus léger. Lorsque, au contraire, une des faces de la plaque est refroidie, sans que l'autre le soit, l'air qui confine à la première de ces faces perd en température et par conséquent gagne en densité; dans une

[1]) M. Finkener, comme je m'en suis aperçu plus tard, paraît aussi attribuer à cette cause l'effet contraire que les rayons calorifiques produisent dans le cas des gaz denses. En effet, le commencement du § 10 de son Mémoire ne peut, me semble-t-il, se rapporter qu'à ce qui est dit au commencement du § 9.

même couche horizontale la pression est alors plus forte au côté refroidi qu'au côté non refroidi, parce que le poids de l'air situé au-dessus de cette couche est plus grand au côté nommé en premier lieu.

Ici nous avons donc une cause en vertu de laquelle la pression au côté échauffé sera plus petite et au côté refroidi plus grande qu'à l'autre côté, qui a conservé la température primitive. Cette diminution ou cette augmentation de pression se fera surtout sentir sur la moitié inférieure de la plaque.

Ce changement de la pression sera certainement contre-balancé en partie par les courants auxquels il donne lui-même naissance; mais il ne le sera, je pense, que pour une partie assez faible. Il restera donc une diminution de pression au côté échauffé, une augmentation de pression au côté refroidi de la plaque. Ce changement de pression sera proportionnel à la densité du gaz. Voilà donc une cause qui peut expliquer le mouvement des objets soumis au rayonnement dans un gaz dense, et qui, par rapport au sens dans lequel elle agit, est précisément l'inverse de celle que nous avons assignée précédemment aux phénomènes observés dans les gaz raréfiés. Comme la cause trouvée en dernier lieu décroît à mesure que la raréfaction du gaz augmente, tandis que la cause reconnue précédemment ne décroît pas ou décroît beaucoup moins, il est possible que pour un certain degré de densité, — le point neutre de Crookes, — les actions opposées de ces deux causes soient exactement égales et par conséquent se contre-balancent; que pour une densité plus grande ou pour une densité plus petite ce soit respectivement la première ou la seconde cause qui exerce une action prépondérante, et qu'ainsi soit obtenu tantôt un mouvement dans un sens, tantôt un mouvement en sens opposé. Le degré de densité auquel les actions des deux causes se neutralisent exactement n'a pas besoin d'être le même dans tous les cas, vu que, pour une même densité, la grandeur de ces actions ne dépend pas pour les deux causes de circonstances entièrement semblables. Les deux actions sont en général d'autant plus grandes qu'il existe une plus grande diffé-

rence de température entre les deux côtés de l'objet. Mais la vitesse des courants gazeux n'influe pas de la même manière sur les deux causes: l'une, comme nous l'avons vu, en est peu affectée, et si elle éprouve quelque chose c'est une diminution; l'autre, au contraire, en est favorisée. Nous avons reconnu, en outre, que l'action répulsive de la chaleur est d'autant plus grande que la température varie plus rapidement dans le gaz au voisinage de la surface échauffée, tandis que la grandeur de cette variation n'a pas une semblable influence sur l'action attractive de la chaleur. Il n'est donc pas surprenant que M. Crookes n'ait pas trouvé dans toutes les circonstances le même degré de densité pour le point neutre, et que dans certaines expériences, où la chute de température était très grande, il ait obtenu une action répulsive de la chaleur à un degré de densité qui, dans la plupart des cas, donnait lieu à une action attractive.

SUR UNE DÉTERMINATION SIMPLE

DE

LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE,

PAR

C. H. C. GRINWIS.

---

1. Dans son célèbre Mémoire: „*On a general method in dynamics*" [1]) Hamilton a montré que dans les phénomènes de mouvement il est en général possible d'assigner une fonction, soit des coordonnées seules soit des coordonnées et du temps, de laquelle se laisse déduire par une simple différentiation tout ce qui est nécessaire pour la connaissance du mouvement. Celui-ci est donc complétement spécifié par la forme de cette fonction, que Hamilton appelle, en conséquence, la *fonction caractéristique.*

Plus est remarquable le fait que l'existence d'une pareille expression peut être démontrée en général, plus on doit regretter que la détermination en reste toujours entourée de difficultés extrêmes, même dans des cas très simples, où la forme cherchée offre déjà une assez grande complication.

C'est principalement à Hamilton et à Jacobi que l'on doit l'indication de la voie à suivre; il résulte de leurs travaux que la fonction en question peut être obtenue par l'intégration d'une équation aux différences partielles du premier ordre, non linéaire. Jacobi

[1]) *Phil. Transactions of the Royal Society of London*, 1834 et 1835.

surtout a puissamment contribué à rendre cette intégration exécutable, et il a même indiqué pour cet objet une méthode générale.

Par une marche toute différente, où l'on part d'une forme intégrale donnée par définition, on reconnaît que dans beaucoup de cas simples de mouvements la détermination de la fonction caractéristique s'obtient très facilement. Dans le cas d'un point matériel (auquel nous nous bornons ici), il suffit, en effet, que le mouvement soit convenablement décomposé suivant deux directions perpendiculaires entre elles, de façon que, par l'application des principes fondamentaux de la dynamique, on puisse donner une forme simple à l'expression de la force vive dans une de ces directions; une transformation, qui se présente d'elle-même, conduit alors immédiatement au résultat désiré.

Nous considérerons successivement *trois* cas importants de mouvement.

2. Prenons pour *premier* cas le mouvement, dans un plan vertical, d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur.

Déterminons le mouvement par rapport à deux axes de coordonnées x et z, l'un horizontal, l'autre vertical, ce dernier dirigé dans le sens de la pesanteur, de haut en bas. En désignant alors par V la fonction caractéristique et par T la demi-force vive du point, nous avons, d'après la définition donnée par Hamilton,

$$V = 2\int T dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

intégrale qui doit être prise entre 0 et t.

Si les demi-forces vives dans la direction horizontale et dans la direction verticale sont représentées respectivement par T_1 et T_2, on a

$$V = 2\int T_1\, dt + 2\int T_2\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \qquad T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

et

$$dt = dx\sqrt{\frac{m}{2T_1}} = dz\sqrt{\frac{m}{2T_2}},$$

de sorte que l'équation (2) se transforme en

$$V = \int\sqrt{2mT_1}\,dx + \int\sqrt{2mT_2}\,dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Remarquons maintenant que la vitesse horizontale et par conséquent T_1 sont constantes, et posons $\sqrt{2mT_1} = \beta$; appliquons ensuite le principe des forces vives, d'après lequel, si U représente la fonction des forces, on a

$$T - U = H = \text{constante}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} T_2 = T - T_1 &= H + U - T_1 \\ &= H + U - \frac{\beta^2}{2m}, \end{aligned}$$

et (3) se change en

$$V = \beta x + \int\sqrt{2m(H+U) - \beta^2}\,dz,$$

ou, à cause de $U = mgz$ (g étant l'accélération de la pesanteur),

$$V = \beta x + \int dz\sqrt{2m(H+mgz) - \beta^2};$$

En exécutant cette intégration, on trouve pour la fonction caractéristique relative à ce cas:

$$V = \beta + \frac{1}{3m^2g}\left\{2m(H+mgz) - \beta^2\right\}^{\frac{3}{2}}; \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

comme il le fallait, elle contient deux constantes, β et H.

Si, pour abréger, nous faisons $2mH - \beta^2 = h^2$, l'équation (4) devient

$$V = \beta x + \frac{1}{3 m^2 g} (h^2 + 2 m^2 g z)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (4a)$$

3. Le mouvement du point s'obtient par la différentiation de V. Comme on a

$$2 T = m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\}$$
$$= m (x'^2 + y'^2),$$

nous poserons d'abord

$$\frac{dT}{dx'} = m x' = m v_1 = p_1 \qquad \frac{dT}{dy'} = m y' = m v_2 = p_2 ;$$

conformément à la théorie développée par Hamilton, tout ce qui concerne le mouvement du point est alors déterminé par les équations suivantes :

$$\left(\frac{dV}{d\beta}\right) = x - \frac{\beta}{m^2 g} \sqrt{h^2 + 2 m^2 g z} = b \ldots (5)$$

$$\left(\frac{dV}{dH}\right) = \frac{1}{m g} \sqrt{h^2 + 2 m^2 g z} = t + C \ldots\ldots (6)$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \beta = p_1 = m V_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = \sqrt{h^2 + 2 m^2 g z} = p_2 = m v_2 \ldots\ldots (8)$$

où b et C représentent des constantes qui, de même que B et H, sont déterminées par les conditions initiales.

De ces quatre équations, (5) donne la trajectoire, (6) la relation entre z et t. Pour l'appréciation du mouvement, ces deux équations pourraient suffire; mais les éq. (7) et (8) donnent directement les vitesses v_1 et v_2 dans les directions horizontale et verticale.

Soit a la vitesse initiale pour $z = 0$, vitesse faisant un angle α avec la direction horizontale; (7) donne alors

$$m v_1 = m a \cos \alpha = \beta = \text{constante},$$

ainsi qu'on l'avait regardé comme connu.

(8) donne, si pour $z = 0$ on pose $v_2 = \overline{v_2} = a \sin a$,

$$v_2{}^2 = \overline{v_2}{}^2 + 2gz = a^2 \sin^2 \alpha + 2gz;$$

puis

$$h^2 = 2mH - \beta^2 = 2mH - m^2a^2\cos^2 \alpha = m^2\overline{v_2}{}^2 = m^2a^2\sin^2\alpha$$

d'où

$$H = \frac{m a^2}{2},$$

de sorte que cette constante est indépendante de la direction de la vitesse.

L'équation (5) donne pour la trajectoire

$$x - \frac{a \cos \alpha}{g} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 2gz} = b;$$

en déterminant b de manière que la trajectoire passe par l'origine, on obtient

$$b = -\frac{a^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = -\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

la trajectoire devient alors

$$x + \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{a \cos \alpha}{g} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 2gz},$$

ou, en développant,

$$z = x\, tg\, a + \frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Si z et g sont pris en sens opposé, on a

$$z = x\, tg\, \alpha - \frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha},$$

équation connue de la trajectoire des projectiles dans le vide.

Enfin, (9) donne

$$\frac{1}{g} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 2gz} = t + C,$$

ou, en déterminant C de façon qu'on ait $t = 0$ lorsque le point se trouve à l'origine,

$$a^2 \sin^2 \alpha + 2 g z = (g t + a \sin \alpha)^2,$$

$$z = \overline{v_2}\, t + \frac{g}{2} t^2.$$

4. Comme *second* cas, nous choisirons le mouvement d'un point matériel autour d'un centre d'attraction.

Si l'on prend ce centre pour origine de coordonnées polaires r et φ, la demi-force T sera exprimée par l'équation

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où m est la masse du point attiré.

On peut regarder ce mouvement comme composé de deux mouvements partiels : pendant que le rayon vecteur tourne autour du centre, le point se déplace incessamment le long de ce rayon, et en vertu de ce dernier mouvement il accomplit, lorsque la trajectoire est fermée, une oscillation à chaque révolution successive. Désignons par T_1 la demi-force vive de ce mouvement d'oscillation, et par T_2 celle du mouvement de révolution ; on a alors

$$T = T_1 + T_2,$$

et l'équation (1) donne

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \qquad T_2 = \frac{m}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

En admettant comme démontré pour ce cas le principe des aires, on a

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

où C est une constante. De (2) il résulte alors

$$T_2 = \frac{m}{2} \frac{C^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Pour la fonction caractéristique on aura, comme précédemment,

$$V = 2 \int T_1 \, dt + 2 \int T_2 \, dt,$$

c'est-à-dire, à raison de (2) et (3),

$$V = 2 \int T_1 \sqrt{\frac{m}{2T_1}} \, dr + m \int r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt,$$

$$= \int \sqrt{2 m T_1} \, dr + m C \int d\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Du principe des forces vives il suit de nouveau, si U est la fonction des forces et H une constante,

$$T - U = H$$

ou

$$T_1 = H + U - \frac{m C^2}{2 r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et, en posant $m C = \alpha$,

$$2 m T_1 = 2 m (H + U) - \frac{\alpha^2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Supposons que la force F, qui agit sur m, soit attractive et en raison inverse de la puissance $n^{ième}$ de la distance, c'est-à-dire $F_1 = -\frac{m \mu}{r^n}$; nous avons alors

$$U = \int F \, dr = \frac{m \mu}{(n-1) \, r^{n-1}}$$

et l'équation (7) se change en

$$2 m T_1 = 2 m \left(H + \frac{m \mu}{(n-1) \, r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}.$$

Il en résulte pour la fonction caractéristique

$$V = \int d\,r \sqrt{2\,m \left(H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} + \alpha\,\varphi. \quad (8)$$

Elle renferme les deux constantes H et α.

5. Si a et b représentent maintenant de nouvelles constantes, que $\frac{d\,r}{d\,t}$ et $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ soient désignés par r' et φ', que v_1 et v_2 indiquent les vitesses des deux mouvements, et qu'on pose, en outre, $\frac{d\,T'}{d\,r'} = m\,r' = m\,v_1 = p_1$ et $\frac{d\,T}{d\,\varphi'} = m\,r^2\,\varphi' = m\,r\,v_2 = p_2$, le mouvement sera complétement déterminé par les *quatre* équations suivantes:

$$\left(\frac{d\,V}{d\,\alpha}\right) = -\alpha \int \frac{d\,r}{r^2 \sqrt{2\,m \left(H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} + \varphi = a, \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\,V}{d\,H}\right) = m \int \frac{d\,r}{\sqrt{2\,m \left(H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = t + b, \quad (10)$$

$$\left(\frac{d\,V}{d\,r}\right) = \sqrt{2\,m \left(H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} = p_1, \quad (11)$$

$$\left(\frac{d\,V}{d\,\varphi}\right) = \alpha = p_2, \quad (12)$$

L'équation (9) donne la trajectoire; (10) conduit au principe des aires (qui toutefois avait déjà été admis par nous); (11) détermine le mouvement v_1 le long du rayon vecteur, et par suite la valeur de T_1; (12) donne v_2. Etudiées de plus près, voici ce que ces équations nous apprennent:

Comme on a $\alpha = m\,C$, l'éq. (9) donne

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r \sqrt{\frac{2\,H}{m\,C^2}\,r^2 + \frac{2}{n-1}\,\frac{\mu}{C^2}\,\frac{1}{r^{n-3}} - 1}} \quad (13)$$

Il est facile de montrer que le rapport $\frac{\mu}{C^2}$ est de la dimension $[L^{n-3}]$, où $[L]$ représente une dimension linéaire; nous avons en effet pour les dimensions, quand $[M]$ désigne la masse et $[T]$ le temps,

$$F = -\frac{m\mu}{r^n} = [M\,L\,T^{-2}],$$

donc

$$\mu = [L^{n+1}\,T^{-2}],$$

et attendu qu'on a

$$C^2 = r^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = r^2 v_2{}^2 = (L^4\,T^{-2}],$$

il s'ensuit

$$\frac{\mu}{C^2} = [L^{n-3}];$$

si l'on pose donc $\frac{\mu}{C^2} = k^{n-3}$, k indique une dimension linéaire.

La trajectoire est alors donnée par l'équation:

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2H}{mC^2}r^2 + \frac{2}{n-1}\left(\frac{k}{r}\right)^{n-3} - 1}} \quad \ldots (14)$$

Pour l'attraction conformément à la loi de Newton, cette équation devient

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{2H}{mC^2} + \frac{2}{kr} - \frac{1}{r^2}}}; \ldots\ldots (15)$$

en y faisant

$$\frac{2H}{mC^2} = \frac{e^2 - 1}{k^2},$$

où e est un nombre, on obtient

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2-1}{k^2} + \frac{2}{kr} - \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2}{k^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2}},$$

d'où

$$\varphi - a = B \cos \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{k}}{\frac{e}{k}},$$

$$\frac{e}{k} \cos(\varphi - a) = \frac{1}{r} - \frac{1}{k},$$

$$r = \frac{k}{1 + e \cos(\varphi - a)},$$

ce qui est, comme on le sait, l'équation polaire des sections coniques, quand le pôle est placé au foyer.

Nous avons dit que l'équation (10) conduit à l'équation des aires. On a en effet, en différentiant (9) par rapport à r:

$$\frac{\alpha\, dr}{r^2 \sqrt{2m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = d\varphi,$$

et en transportant cette valeur dans l'équation (10),

$$m \int \frac{r^2\, d\varphi}{\alpha} = t + b,$$

ou, à cause de $\alpha = m\, C$,

$$r^2\, d\varphi = C\, dt,$$

expression connue du principe des aires, pour le cas actuel.

L'équation (11) donne:

$$p_1 = m v_1 = \sqrt{2m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)r^{n-1}}\right) - \frac{m^2 C^2}{r^2}},$$

$$v_1{}^2 = 2\left(\frac{H}{m} + \frac{\mu}{(n-1)r^{n-1}}\right) - \frac{C^2}{r^2},$$

$$T_1 = H + \frac{m\mu}{(n-1)\, r^{n-1}} - \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2},$$

résultat conforme à celui trouvé en (6). On en déduit

$$T_1 = T - \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2},$$
$$= \int F\,d\,r - \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2},$$

ou, après différentiation,

$$-\frac{\mu}{r^n} = \frac{d^2\,r}{d\,t^2} - \frac{C^2}{r^3},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\mu}{r^n} = r\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 - \frac{d^2\,r}{d\,t^2},$$

formules connues du mouvement curviligne.

Enfin, (12) donne

$$p_2 = m\,r\,v_2 = \alpha,$$
$$v_2 = \frac{Const.}{r},$$

expression de la vitesse de révolution du point qui se trouve à la distance r du centre.

6. Prenons pour *troisième* cas le mouvement d'un point pesant sur la surface d'une sphère. Supposons l'axe des z dirigé dans le sens de la pesanteur, les axes des x et des y horizontaux; a étant le rayon de la sphère, déterminons la position d'un point par des coordonnées sphériques φ et ψ, de façon que

$$x = a\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = a\sin\varphi\cos\psi.$$
$$z = a\sin\psi.$$

Nous avons alors

$$\frac{dx}{dt} = x',\ \frac{d\,y}{d\,t} = y',\ \frac{dz}{dt} = z',\ \frac{d\,\varphi}{d\,t} = \varphi',\ \frac{d\,\psi}{d\,t} = \psi',$$
$$x' = -\,a\,(\varphi'\sin\varphi\cos\psi + \psi'\cos\varphi\sin\psi)$$
$$y' = \quad a\,(\varphi'\cos\varphi\cos\psi - \psi'\sin\varphi\sin\psi)$$
$$z' = \quad a\,\psi'\cos\psi,$$

et en conséquence, pour la demi-force vive du point,

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m\,a^2}{2}(\varphi'^2\cos^2\psi + \psi'^2)\ .\ (1)$$

Décomposons maintenant la vitesse en deux autres, l'une horizontale, l'autre verticale, et soient T_1 et T_2 les demi-forces vives correspondantes; on aura

$$T = T_1 + T_2$$

et

$$T_1 = \frac{m a^2}{2} \cos^2 \psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad T_2 = \frac{m a^2}{2} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \quad . \; . \; (2)$$

Il en résulte pour la fonction des forces

$$U = \int m g \cos \psi \, . \, a \, d\psi = m g a \sin \psi \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

et par conséquent pour les composantes de la force

$$\Phi = \frac{dU}{d\varphi} = 0 \qquad \psi = \frac{dU}{d\psi} = m g a \cos \psi . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

De (1) on déduit d'ailleurs

$$\frac{d T}{d\varphi'} = m a^2 \varphi' \cos^2 \psi, \qquad \frac{d T}{d\varphi} = 0,$$

de sorte que l'une des équations du mouvement, selon Lagrange, devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d T}{d\varphi'}\right) - \frac{d T}{d\varphi} = \Phi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d(\varphi' \cos^2 \psi)}{dt} = 0,$$

d'où

$$\varphi' \cos^2 \psi = C = \text{constante} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Après ces remarques, nous obtenons pour la fonction caractéristique

$$V = 2 \int T_1 \, dt + 2 \int T_2 \, dt,$$

$$= m a^2 \int \cos^2 \psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt + 2 \int T_2 \, dt,$$

$$= m a^2 \int \cos^2 \psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) d\varphi + 2 \int T_2 \, dt; \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Or, d'après (2), on a

$$d\,t = d\,\psi \sqrt{\frac{m\,a^2}{2\,T_2}},$$

de sorte que, en vertu de l'éq. (5), l'éq. (6) se transformera en

$$V = m\,a^2\,C \int d\varphi + \int d\,\psi \sqrt{2\,m\,a^2\,T_2} \;.\;.\;.\;.\;.\; (7)$$

Le principe des forces vives donne

$$\begin{aligned} T_2 &= H + U - T_1 \\ &= H + m\,g\,a \sin\psi - \frac{m\,a^2}{2}\,\frac{C^2}{\cos^2\psi}, \end{aligned}$$

et, en posant $m\,a^2\,C = \alpha$,

$$2\,m\,a^2\,T_2 = 2\,m\,a^2\,(H + m\,g\,a \sin\psi) - \frac{\alpha^2}{\cos^2\psi};$$

l'équation (7) donne alors pour la fonction caractéristique, dans le cas dont il s'agit,

$$V = \alpha\,\varphi \int d\,\psi \sqrt{2\,m\,a^2\,(H + m\,a\,g \sin\psi) - \frac{\alpha^2}{\cos^2\psi}} \;.\;.\; (8)$$

Comme cette intégrale ne peut être généralement obtenue sous forme finie, et qu'il en est de même des intégrales qui entrent dans les équations de mouvement déduites de (8), nous nous abstiendrons de toute discussion ultérieure de ces équations.

UTRECHT, Septembre 1878.

SUR

L'ORBITE ANNUELLE

QUE LES ÉTOILES FIXES SEMBLENT DÉCRIRE AU CIEL

PAR SUITE DE L'ABERRATION DE LA LUMIÈRE,

PAR

J. A. C. OUDEMANS.

Il arrive parfois qu'une solution simple d'un problème, après avoir été d'abord connue, tombe dans un oubli prolongé, pour être trouvée ensuite une seconde fois, en quelque sorte par hasard. Tel a été le cas pour la question de l'orbite annuelle que paraissent décrire au ciel, par suite de l'aberration de la lumière, les étoiles fixes.

Dans beaucoup de traités d'astronomie, lorsqu'il ne s'agit que de donner une explication élémentaire du phénomène de l'aberration, l'orbite de la Terre est regardée comme circulaire, et par conséquent sa vitesse comme uniforme. Se propose-t-on d'étudier avec plus d'exactitude le déplacement apparent de l'étoile, alors l'excentricité de l'orbite terrestre est supposée très petite, et dans le développement des formules on néglige les puissances supérieures de cette excentricité.

On arrive ainsi à ce résultat, que chaque étoile paraît décrire dans le cours d'une année une ellipse, dont le grand axe a une valeur constante (de $2 \times 20'',445$ suivant la détermination

de Struve) et est dirigé parallèlement à l'écliptique, tandis que le petit axe est égal à cette même quantité multipliée par le sinus de la latitude de l'étoile.

Ce résultat est parfaitement exact, mais la méthode employée pour l'établir présente, à mon avis, un double défaut. En premier lieu, elle est souvent très prolixe, tandis qu'une voie plus simple et plus directe peut conduire à la connaissance de l'orbite apparente de l'étoile; en second lieu, soit dès le début soit dans la suite du calcul, des abréviations sont introduites, qui tendraient à faire croire que le résultat ci-dessus énoncé n'est encore qu'une approximation. Par là on est amené involontairement à se demander quelle pourrait bien être l'orbite apparente des étoiles fixes, par suite des mouvements de la lumière et de la Terre, si l'orbite terrestre avait une excentricité notable au lieu de coïncider presque, comme c'est le cas, avec un cercle?

Parmi les auteurs de traités récents d'astronomie, il y en a quelques-uns, tels que Oppolzer (*Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*) et Chauvenet (*Practical and spherical Astronomy*), qui, à l'exemple de Bessel, tiennent compte de l'excentricité de l'orbite terrestre et traitent le problème par une méthode analytique rigoureuse. Dernièrement, toutefois, j'ai trouvé une démonstration élémentaire des mêmes formules auxquelles on arrive par la voie analytique, démonstration qui m'a paru présenter la question sous un nouveau point de vue et mettre en lumière quelques résultats inattendus.

Feu le professeur Kaiser, dont les leçons d'astronomie populaire attiraient toujours à bon droit un nombreux auditoire, se servait dans son cours d'un appareil très simple pour faire comprendre l'aberration de la lumière. Empruntant l'explication du phénomène à la théorie de l'émission, il montrait que chaque étoile paraît décrire un petit cercle, dont le plan est parallèle à celui de l'écliptique. L'orbite de la Terre était supposée circulaire, sa vitesse par conséquent uniforme, et ainsi il devenait évident que l'étoile devait aussi sembler parcourir un cercle dans ce plan, avec cette condition, toutefois, que le rayon vecteur

de l'étoile fût toujours en avance de 90° sur celui de la Terre. Lorsqu'il ne s'agit que de donner une idée générale de l'aberration, considérée comme preuve du mouvement de la Terre autour du Soleil, une pareille explication est effectivement suffisante. Mais, pour l'intelligence parfaite du phénomène tel qu'il se produit en réalité, il faut, même en acceptant l'application de la théorie de l'émission au lieu de celle des ondulations, avoir égard aux trois circonstances suivantes: 1° que le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas uniforme, mais a lieu conformément à la seconde loi de Képler; 2° que la direction du mouvement fait un angle variable avec le rayon vecteur; 3° que la vitesse du mouvement, de laquelle dépend précisément la grandeur du déplacement de l'étoile, est également variable. Et la question est alors de savoir ce que devient la forme du petit cercle que l'étoile semble parcourir dans le plan parallèle à l'écliptique, et quelle est la loi du mouvement de l'étoile.

La réponse à cette question peut facilement être trouvée sans qu'on ait besoin de regarder l'excentricité de l'orbite terrestre comme une grandeur dont la seconde puissance est négligeable; cette réponse, la voici:

1°. Quelle que soit l'excentricité e de l'orbite terrestre, toutes les étoiles paraissent décrire, à raison du phénomène de l'aberration, un cercle situé dans un plan parallèle à celui de l'écliptique;

2°. ce cercle est excentrique par rapport au lieu A que l'étoile occuperait si la Terre était immobile ou si la lumière se mouvait avec une vitesse infinie;

3°. l'excentricité du point A dans le cercle est égale à celle de l'orbite terrestre;

4°. la droite qui passe par le point A et par le centre de ce cercle est dirigée perpendiculairement au grand axe de l'orbite terrestre, de telle sorte que le centre en question se trouve au côté vers lequel est dirigé le mouvement de la Terre à son périhélie;

5°. le mouvement de l'étoile sur ce cercle est irrégulier; par rapport au point A, il est tel que la droite joignant l'étoile à

ce point est toujours parallèle à la tangente à l'orbite terrestre menée au point que la Terre occupe au moment considéré;

6°. par rapport au centre du cercle, toutefois, le rayon vecteur de l'étoile suit exactement la même loi que celui de la Terre; seulement, en longitude, l'étoile a toujours 90° d'avance sur la Terre.

La preuve de ces propositions n'est pas difficile à donner. Soient (Pl. V fig. 1) $ADEG$ l'orbite de la Terre, F le foyer où se trouve le Soleil, C le point auquel est arrivée la Terre; l'angle AFC est alors l'anomalie vraie $= v$. Posant $AB = a$ et l'excentricité de l'orbite $= e$, nous avons $BF = ae$; le rayon vecteur FC étant représenté par r, et q désignant l'angle FCF' que les deux rayons vecteurs font entre eux, il suit du triangle FCF':

$$\cos q = \frac{r^2 + (2a - r)^2 - 4a^2e^2}{2r(2a - r)},$$

d'où

$$\cos \tfrac{1}{2} q = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{r(2a - r)}},$$

puis

$$FH = l = r \cos \tfrac{1}{2} q = a\sqrt{1 - e^2}\sqrt{\frac{r}{2a - r}}.$$

Mais on a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e.\cos v},$$

$$2a - r = \frac{a(1 + 2e\cos v + e^2)}{1 + e\cos v},$$

par conséquent,

$$l = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}}.$$

La surface totale de l'ellipse est $= a^2\sqrt{1 - e^2} \times \pi$. Soit la durée de la révolution $= T$ secondes, l'aire décrite par le rayon

vecteur en une seconde est alors $= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} \times \pi}{T} = \frac{1}{2} l s$, si s représente la vitesse linéaire de la Terre en une seconde. Nous avons donc

$$s = \frac{2 \pi a}{T \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 + 2 e \cos v + e^2}.$$

Appelons maintenant S la vitesse de la lumière, A la distance de l'étoile, λ la grandeur du déplacement apparent de l'étoile dans un plan parallèle au plan de l'elliptique; on a

$$\lambda = \frac{A s}{S} = A \times \frac{2 \pi a}{S T \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 + 2 e \cos v + e^2}.$$

La direction dans laquelle s'opère ce déplacement est indiquée par l'angle $H J C$ que la tangente fait avec le grand axe de l'orbite terrestre; cet angle est évidemment $= v + 90^\circ - \frac{1}{2} q$. Si donc, dans la fig. 2, on fait l'angle $A' F' C$ égal à cette valeur et $F' C' = \lambda$, C' sera le lieu où l'étoile paraît se trouver. Les coordonnées de ce point sont

$$C D' = x = -\lambda \sin (v - \tfrac{1}{2} q),$$
$$F' D' = y = \lambda \cos (v - \tfrac{1}{2} q).$$

A l'aide de la valeur donnée ci-dessus pour $\cos \frac{1}{2} q$ on trouve aisément

$$\sin \tfrac{1}{2} q = \frac{e \sin v}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

puis

$$\sin (v - \tfrac{1}{2} q) = \frac{\sin v}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

$$\cos (v - \tfrac{1}{2} q) = \frac{\cos v + e}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

par conséquent

$$x = -A \times \frac{2 \pi a}{S T \sqrt{1-e^2}} . \sin v,$$

$$y = \quad A \times \frac{2\pi a}{S\,T\sqrt{1-e^2}} \cdot (\cos v + e).$$

A la rigueur, A n'est pas constant, attendu que la distance de l'étoile au Soleil change à raison de la révolution de la Terre autour du Soleil; mais, vu le grand éloignement des étoiles fixes, la différence est tout à fait insensible. Elle disparaît même entièrement quand on ne considère que le déplacement angulaire; si, en effet, nous prenons chaque fois pour unité un déplacement qui, vu de la Terre, se présente sous un angle de une seconde, les expressions trouvées doivent être divisées par $A \sin 1''$, et en posant

$$\frac{2\pi a}{S\,T \sin 1''\sqrt{1-e^2}} = \alpha,$$

nous obtenons les deux équations simples

$$x = -\alpha \sin v \qquad = \alpha \cos (v + 90^\circ),$$
$$y = \quad \alpha \cos v + \alpha e = \alpha \sin (v + 90^\circ) + \alpha e,$$

qui impliquent les propositions énoncées ci-dessus. Dans la seconde de ces équations, αe est égal à la ligne $B' F'$ de la figure; en d'autres termes, c'est l'excentricité de l'orbite apparente circulaire de l'étoile, excentricité qui, par rapport au rayon α, est la même que celle de l'orbite terrestre.

Toutes les étoiles paraissent donc parcourir un cercle excentrique pareil à celui que représente la fig. 2; dans tous ces cercles l'axe $B' F'$ est dirigé du même côté, à savoir, perpendiculairement à la direction du grand axe de l'orbite terrestre.

Il suit de là que l'orbite apparente, que chaque étoile décrit en vertu du rapport existant entre la vitesse de la lumière et celle de la Terre, est une ellipse ayant un demi-grand axe $= \alpha =$

$$\frac{2\pi a}{S\,T \sin 1''\sqrt{1-e^2}},$$

dirigé parallèlement à l'écliptique, et un demi-petit axe égal à

cette même quantité multipliée par le sinus de la latitude de l'étoile.

Pour trouver de combien l'étoile est déplacée au ciel par l'effet de l'aberration, nous désignerons

la longitude de l'étoile par λ,
la latitude de l'étoile „ β,
la longitude du Soleil „ L,
la longitude du périgée du Soleil par Π,

on a alors: $v = L - \Pi$.

Vu de la Terre, le cercle que l'étoile semble parcourir se présente comme une ellipse, dont le grand axe, couché le long du parallèle de latitude, est $= A\alpha$, et dont le petit axe, perpendiculaire à ce parallèle, est $= A \sin\beta$; celui des diamètres du cercle qui ne subit pas de raccourcissement par la perspective, et qui coïncide par conséquent avec le grand axe de l'ellipse, est perpendiculaire à la droite qui joint la Terre à l'étoile, et a dans ce cercle une direction allant de $\lambda - 90°$ à $\lambda + 90°$. Le centre du cercle est à la distance $A\alpha e$ de l'étoile, dans la direction $\Pi - 90°$. Projetée sur le susdit diamètre non raccourci, l'abscisse de ce centre est donc $+ A\alpha e \cos(\Pi - \lambda)$ et l'ordonnée $A\alpha e \sin(\Pi - \lambda)$. Vue de la Terre, cette abscisse donne une différence de longitude de $\alpha e \cos(\Pi - \lambda) \sec\beta$, et cette ordonnée une différence de latitude de $\alpha e \sin(\Pi - \lambda) \sin\beta$, expressions qu'on trouve aussi, mais obtenues par une voie analytique plus détournée, entre autres dans le *Cours d'astronomie* de M. Dubois, 2e éd. (1877) p. 530. Pour un espace de temps qui ne soit pas démesurement long, on peut regarder ce déplacement comme invariable, quoique en réalité, et abstraction faite de tout mouvement propre de l'étoile, il soit dépendant de la direction du grand axe et de l'excentricité de l'orbite terrestre, ainsi que de la situation du plan de l'écliptique, tous éléments sujets à des variations lentes. Du reste, le coefficient αe ne s'élève actuellement qu'à $20'',445 \times \times 0{,}016892 = 0'',343$, et d'ici à quelques milliers d'années les variations de cette quantité ne seront pas appréciables, de sorte qu'on peut dire que ce terme constant se confond avec le lieu moyen de l'étoile.

Comme le fait remarquer avec raison M. Oppolzer dans son *Lehrbuch*, cette quantité ne peut pourtant pas être négligée dans le calcul de l'aberration des planètes.

Pour connaître maintenant aussi les termes variables de l'aberration, nous n'avons qu'à considérer encore la situation relative du lieu apparent C' de l'étoile et du centre B' du cercle déjà mentionné à plusieurs reprises. La distance $B'C'$ est constante et $= A\alpha$, la direction de $B'C'$ est $= II + 90° + v = L + 90°$. La projection de cette ligne sur le diamètre non raccourci dont il a été question plus haut, ou, autrement dit, sur le parallèle de latitude, est donc $= A\alpha \cos(L - \lambda)$; l'ordonnée perpendicuaire à ce parallèle est $= A\alpha \sin(L - \lambda)$. La première donne un changement de longitude de

$$\alpha \cos(L - \lambda) \operatorname{séc} \beta,$$

la seconde un changement de latitude de

$$\alpha \sin(L - \lambda) \sin \beta;$$

ce sont les expressions connues de l'aberration en longitude et en latitude, expressions trouvées ordinairement par une voie beaucoup plus pénible.

Nous chercherons encore quel est le cercle que l'étoile semble décrire par suite de l'aberration diurne. L'observateur se mouvant alors avec une vitesse uniforme dans un cercle dont le plan est parallèle à celui de l'équateur, l'étoile, à raison de ce mouvement diurne de la Terre, paraîtra aussi se déplacer suivant un cercle, dont les dimensions sont plus petites que celles du précédent, dont le plan est également parallèle à celui de l'équateur, et sur lequel l'étoile est toujours en avance de 90° par rapport au lieu de l'observation. Si t est le temps astronomique, a l'ascension droite de l'étoile, d sa déclinaison, le lieu apparent de l'étoile, sur le petit cercle en question, sera donc dirigé vers $90° + t$. Ce petit cercle se présente de nouveau sous l'aspect d'une ellipse, dont le grand axe suit la direction du parallèle et le petit axe la direction perpendiculaire, c'est-à-dire celle du cercle de déclinaison; dans

le petit cercle, la direction du diamètre non raccourci est de $a - 90°$ à $a + 90°$. Un raisonnement analogue à celui qui a été développé ci-dessus donne donc pour l'accroissement de l'ascension droite

$$\alpha' \cos (t - a) \sec d,$$

et pour celui de la déclinaison

$$\alpha' \sin (t - a) \sin d;$$

dans ces formules, α' est la constante de l'aberration diurne pour le lieu de l'observation, c'est-à-dire, si r représente le rayon vecteur de la Terre pour ce lieu d'observation et b la latitude géocentrique,

$$\frac{\pi r \cos a}{43200 S \sin 1''},$$

expression qu'on peut remplacer, toutefois, avec une erreur de moins de $\frac{1}{600}$, par celle-ci:

$$\frac{\pi a \cos \varphi}{43200 \text{ S} \sin 1''} = 0'',32 \cos \varphi,$$

où a désigne le rayon de l'équateur et φ la latitude géographique.

La démonstration de notre première proposition devient encore plus simple lorsqu'on fait usage de cette propriété de l'ellipse, que les pieds H des perpendiculaires FH (fig. 1) se trouvent tous à la circonférence du cercle décrit sur le grand axe AE comme diamètre. Car, si la droite HF est prolongée jusqu'à sa seconde intersection (L) avec la même circonférence de cercle, on a $FL \times FH = FE \times FA =$ constante, de sorte que la droite FL est proportionnelle à la vitesse de la Terre au point C de son orbite. Cette droite FL est toujours perpendiculaire à la direction du mouvement. Tous les points L sont situés sur la circonférence du cercle ALE, et par conséquent toutes les extrémités de

droites telles que $F'C$ (fig. 2), qui sont dirigées perpendiculairement à FL et proportionnelles à sa longueur, tombent aussi sur une circonférence de cercle.

La proposition est ainsi démontrée, mais la grandeur exacte du petit cercle décrit par l'étoile ne peut être trouvée que par le raisonnement employé ci-dessus.

Dans le cas où l'orbite de la Terre, au lieu d'être elliptique, serait parabolique (voir fig. 3), on voit facilement quelle modification subirait l'orbite apparente de l'étoile. L'excentricité serait alors $= 1$, c'est-à-dire que l'étoile elle-même se trouverait à la circonférence du petit cercle d'aberration. La droite $F'M$, qui joint ce point au centre, serait perpendiculaire à l'axe de l'orbite parabolique de la Terre. Pendant que la Terre parcourrait la première moitié de son orbite, l'étoile semblerait se mouvoir le long du demi-cercle $F'NM$; le diamètre $F'M$ serait de nouveau égal à

$$A \times \frac{s}{S \sin 1'} = A \times \frac{2k}{86400 \sqrt{p} S \sin 1''} = \frac{2k \times 497{,}78}{86400 \sqrt{p} \sin 1''}$$
$$= \frac{k \times 497{,}78 \sqrt{2}}{86400 \sin 1'' \sqrt{q}} = \frac{28'{,}9}{\sqrt{q}}.$$

Si l'orbite de la Terre était une hyperbole (voir fig. 4), l'orbite apparente de l'étoile resterait toujours un cercle; mais, comme l'excentricité du lieu de l'étoile serait alors > 1, l'étoile F se trouverait en dehors du cercle, $F'A$ et $F'B$ seraient les tangentes menées de F' au cercle d'aberration, et ces tangentes seraient parallèles aux asymptotes de l'hyperbole. Aussi longtemps que la Terre, encore très éloignée sur la première branche de l'hyperbole, se rapprocherait du périhélie avec une vitesse uniforme, l'étoile semblerait immobile en A; et durant le parcours total de l'orbite hyperbolique l'étoile décrirait l'arc AMB, appartenant au cercle dont le demi-diamètre est égal à

$$\frac{k \sqrt{p}}{86400 S \sin 1'} = \frac{k \sqrt{p} \times 497{,}78}{86400 \sin 1''} = 20''{,}442 \sqrt{p},$$

expression ou p désigne le paramètre de l'orbite hyperbolique. La distance $F' M$ serait évidemment $= \frac{2+e}{2}$ fois ce diamètre.

Revenons-en au mouvement elliptique de la Terre, et considérons le déplacement que l'étoile éprouve en conséquence de ce mouvement, ou le rayon vecteur de son orbite apparente; nous voyons alors que ce rayon vecteur n'est *pas* donné par la formule

$$\frac{\text{vitesse moyenne de la Terre}}{\text{vitesse de la lumière}},$$

car, la circonférence d'une ellipse étant plus petite que celle du cercle décrit sur son grand axe, la vitesse moyenne sur l'ellipse est aussi $< \frac{2\pi a}{T}$, et le rayon du cercle d'aberration pourrait donc être supposé $< \frac{2\pi a}{S\,T \sin 1''}$; mais ci-dessus nous l'avons trouvé égal à $\frac{2\pi a}{S\,T \sin 1'' \sqrt{1-e^2}}$, c'est-à-dire, non seulement plus grand que ce que donnerait la vitesse moyenne, mais même plus grand que ce qu'on obtiendrait si la Terre se mouvait *sur le cercle* qui a pour diamètre le grand axe de son orbite. Le cercle sur lequel, la durée de la révolution restant la même, le mouvement devrait se faire pour donner le même cercle d'aberration, a pour rayon $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$ ou $\frac{a^2}{b}$, b étant le petit axe de l'orbite elliptique de la Terre.

Ce qui précède était écrit, lorsque je me suis aperçu qu'une démonstration analogue à celle qui vient d'être donnée se trouve déjà dans un ouvrage de Th. Simpson, *Essays on Curious and Useful subjects in speculative and mixed mathematicks*, London, 1740.

Le même sujet a été traité avec plus de détails par Frisius, dans sa *Cosmographia* (Milan, 1774—45), Cap. V, *De variati-*

onibus ortis e lucis aberratione. Voici l'énoncé du second théorème (Theorema XI) de ce chapitre: *Si spectatoris oculus in sectione aliqua conica moveatur, semita apparens fixae cuiuscumque erit circulus, et centrum apparens motus aut intra, aut extra, aut in ipsa erit peripheria circuli, prout sectio conica erit ellipsis aut hyperbola aut parabola.*

Enfin, Melanderhjelm, dans son *Conspectus praelectionum academicarum, continens fundamenta astronomiae*, publié à Holm, Upsal et Abo, en 1779, cite les deux auteurs précédents. Depuis cette époque, la démonstration de Simpson paraît être tombée dans un oubli complet.

Les résultats auxquels j'étais parvenu n'ayant donc rien de nouveau, mon intention première avait été de les garder par devers moi; ayant reconnu toutefois que ces résultats étaient, en général, ou bien entièrement inconnus ou au moins connus très imparfaitement, et prenant en considération la rareté actuelle des ouvrages de Simpson, de Frisius et de Melanderhjelm, j'ai cru devoir céder à la demande qui m'a été faite de publier la démonstration qu'on vient de lire.

UTRECHT, 12 Septembre 1878.

L'INFLUENCE

DES

PHASES DE LA LUNE SUR LA TEMPÉRATURE DE L'AIR À BATAVIA,

PAR

P. A. BERGSMA.

En discutant les observations horaires de la température de l'air faites à l'Observatoire de Batavia pendant les dix années de 1866 à 1875, j'ai pensé qu'il ne serait peut-être pas sans intérêt d'examiner si quelque variation dépendante des phases de la lune pouvait y être découverte.

Huit différentes phases de la lune ont été considérées à cet effet; dans les tableaux qu'on trouvera plus loin, elles sont désignées par les nombres (0), (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7), les nombres (0), (2), (4) et (6) indiquant la nouvelle lune, le premier quartier, la pleine lune et le dernier quartier: les nombres (1), (3), (5) et (7) se rapportant aux phases intermédiaires.

Les températures moyennes ont été calculées pour les jours de chacune de ces phases lunaires, en prenant pour jours d'une certaine phase non-seulement le jour où cette phase arrive, mais aussi ceux qui le précèdent et le suivent immédiatement. Les valeurs moyennes ainsi obtenues pour la température du jour aux différentes phases de la lune dans chacun des lustres 1866—1870 et 1871—1875, et dans la décade 1866—1875, sont données dans les colonnes 2, 3 et 4 du tableau I; les trois dernières colonnes verticales du tableau indiquent, pour chacune de ces périodes, les quantités dont les huit valeurs trouvées pour les différentes phases lunaires s'écartent de la moyenne de cette

période. Les nombres de la dernière colonne semblent indiquer dans la température de l'air l'existence d'une très minime variation dépendante des phases de la lune, variation qui a pour effet de rendre la température moyenne diurne pendant une moitié de la lunaison un peu plus haute que pendant l'autre moitié. L'amplitude de cette variation n'atteint pas 0°,1 C.

Les températures plus élevées des jours voisins de la pleine lune peuvent être dues à la chaleur rayonnée par la face illuminée de la lune, face qui ces jours-là est tournée vers la terre. S'il en est réellement ainsi, la température moyenne des heures de la nuit doit montrer aux différentes phases de la lune une variation analogue, mais d'amplitude plus grande. En conséquence, on a calculé pour les huit phases lunaires la température moyenne des heures comprises entre 7 h. après midi et 5 h. avant midi. Le résultat est contenu dans le tableau II.

Il ressort de ce tableau que, si la température moyenne diurne est réellement un peu plus élevée vers l'époque de la pleine lune qu'aux autres phases, cela n'est pas dû à la chaleur émise par la lune.

Une autre cause de la température un peu plus élevée des jours voisins de la pleine lune peut consister en ce que, ces jours-là, le ciel serait plus serein que les autres jours, ainsi qu'on l'a parfois supposé. Si tel est effectivement le cas, la température moyenne des heures du jour devra exhiber une variation dépendante des phases de la lune, analogue à celle offerte par la température moyenne des vingt-quatre heures, mais d'une amplitude plus grande. Pour s'en assurer, on a calculé pour les huit phases de la lune la température moyenne des heures comprises entre 7 h. avant midi et 5 h. après midi. Les résultats de ce calcul sont consignés dans le tableau III.

Ce tableau fait voir que, si la température moyenne des vingt-quatre heures est réellement un peu plus haute aux jours voisins de la pleine lune qu'aux jours des autres phases lunaires, il faut l'attribuer à ce que la température des heures du jour est, vers la première époque, un peu plus haute qu'aux autres,

et l'on peut supposer que cela résulte de ce que le ciel est plus serein pendant les jours rapprochés de la pleine lune que pendant les autres. Si cette supposition est conforme à la vérité, l'oscillation diurne moyenne de la température doit être plus grande lors de la pleine lune que dans les autres phases de cet astre. Pour contrôler cette déduction, on a calculé pour les huit différentes phases lunaires l'oscillation diurne moyenne de la température. Le tableau IV fait connaître les résultats de ce calcul.

On voit, par ce tableau, que l'oscillation diurne moyenne de la température est effectivement plus grande lors de la pleine lune que lors des autres phases.

Dans le tableau V ont été réunis les résultats des tableaux I—IV. Les nombres contenus dans ce tableau paraissent indiquer: 1° que la température moyenne des vingt-quatre heures, la température moyenne des heures du jour (7 h. avant midi à 5 h. après midi) et l'oscillation diurne moyenne de la température sont plus fortes pendant les phases lunaires (4) et (5), ou aux jours voisins de la pleine lune, que pendant les autres phases; 2° que, au contraire, la température moyenne des heures de la nuit (7 h. après midi à 5 h. avant midi) est plus basse lors des phases (4) et (5), ou aux jours voisins de la pleine lune, que lors des autres phases lunaires; 3° que cette double variation de la température de l'air, dépendante des phases de la lune, laquelle variation doit être regardée comme un phénomène unique, ne peut être un effet direct de la chaleur rayonnée vers la terre par la surface de la lune, mais qu'elle est très probablement un résultat secondaire produit par une variation dans la clarté du ciel, variation dépendante des phases lunaires.

Ne pouvant me livrer à une discussion historique complète de la question, je m'abstiens de toute considération de ce genre et me borne à donner le simple résultat qui se déduit des observations horaires de la température de l'air faites à Batavia durant la décade 1866—1875; ce résultat, toutefois, a encore besoin d'être confirmé par une autre série de dix années d'observation.

TABLEAU I.

TEMPÉRATURE MOYENNE DES VINGT-QUATRE HEURES POUR HUIT DIFFÉRENTES PHASES DE LA LUNE.

Phases de la lune.		1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	Nouvelle lune.	25°,90	25°,69	25°,79	— 0°,02	— 0°,09	— 0°,06
(1)		25 ,87	25 ,88	25 ,88	— 0 ,05	+ 0 ,10	+ 0 ,03
(2)	Premier quartier.	25 ,96	25 ,72	25 ,84	+ 0 ,04	— 0 ,06	— 0 ,01
(3)		25 ,92	25 ,84	25 ,88	0 ,00	+ 0 ,06	+ 0 ,03
(4)	Pleine lune.	25 ,96	25 ,78	25 ,86	+ 0 ,04	0 ,00	+ 0 ,01
(5)		25 ,99	25 ,78	25 ,89	+ 0 ,07	0 ,00	+ 0 ,04
(6)	Dernier quartier.	25 ,89	25 ,78	25 ,83	— 0 ,03	0 ,00	— 0 ,02
(7)		25 ,89	25 ,77	25 ,82	— 0 ,03	— 0 ,01	— 0 ,03
Moyenne des huit valeurs relatives aux différentes phases lunaires.		25°,92	25°,78	25°,85			

TABLEAU II.

TEMPÉRATURE MOYENNE DES HEURES DE LA NUIT (7 H. APRÈS M. à 5 H. AV. M.) POUR HUIT DIFFÉRENTES PHASES DE LA LUNE.

Phases de la lune.		1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	Nouvelle lune.	24°,53	24°,33	24°,43	+ 0°,04	— 0°,07	— 0°,02
(1)		24 ,48	24 ,52	24 ,50	— 0 ,01	+ 0 ,12	+ 0 ,05
(2)	Premier quartier.	24 ,50	24 ,33	24 ,42	+ 0 ,01	— 0 ,07	— 0 ,03
(3)		24 ,53	24 ,49	24 ,51	+ 0 ,04	+ 0 ,09	+ 0 ,06
(4)	Pleine lune.	24 ,46	24 ,37	24 ,41	— 0 ,03	— 0 ,03	— 0 ,04
(5)		24 ,47	24 ,38	24 ,43	— 0 ,02	— 0 ,02	— 0 ,02
(6)	Dernier quartier.	24 ,50	24 ,40	24 ,45	+ 0 ,01	0 ,00	0 ,00
(7)		24 ,45	24 ,41	24 ,43	— 0 ,04	+ 0 ,01	— 0 ,02
Moyenne des huit valeurs relatives aux différentes phases lunaires.		24°,49	24°,40	24°,45			

TABLEAU III.

TEMPÉRATURE MOYENNE DES HEURES DU JOUR (7 H. AV. M. à 5 H. APRÈS M.) POUR HUIT DIFFÉRENTES PHASES DE LA LUNE.

Phase de la lune.		1866–1870.	1871–1875.	1866–1875.	1866–1870.	1871–1875.	1866–1875.
(0)	Nouvelle lune.	27°,44	27°,22	27°,33	— 0°,07	— 0°,10	— 0°,09
(1)		27 ,40	27 ,40	27 ,40	— 0 ,11	+ 0 ,08	— 0 ,02
(2)	Premier quartier.	27 ,56	27 ,28	27 ,42	+ 0 ,05	— 0 ,04	0 ,00
(3)		27 ,47	27 ,36	27 ,41	— 0, 04	+ 0 ,04	— 0 ,01
(4)	Pleine lune.	27 ,62	27 ,38	27 ,50	+ 0 ,11	+ 0 ,06	+ 0 ,08
(5)		27 ,67	27 ,36	27 ,51	+ 0 ,16	+ 0 ,04	+ 0 ,09
(6)	Dernier quartier.	27 ,43	27 ,29	27 ,36	— 0 ,08	— 0 ,03	— 0 ,06
(7)		27 ,49	27 ,29	27 ,39	— 0 ,02	— 0 ,03	— 0 ,03
Moyenne des huit valeurs relatives aux différentes phases lunaires.		27°,51	27°,32	27°,42			

TABLEAU IV.

OSCILLATION DIURNE MOYENNE DE LA TEMPÉRATURE POUR HUIT DIFFÉRENTES PHASES DE LA LUNE.

Phase de la lune.		1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	Nouvelle lune.	6°,47	6°,48	6°,47	— 0°,08	0°,00	— 0°,04
(1)		6 ,40	6 ,47	6 ,43	— 0 ,15	— 0 ,01	— 0 ,08
(2)	Premier quartier.	6 ,57	6 ,46	6 ,52	+ 0 ,02	— 0 ,02	+ 0 ,01
(3)		6 ,46	6 ,49	6 ,48	— 0 ,09	+ 0 ,01	— 0 ,03
(4)	Pleine lune.	6 ,70	6 ,58	6 ,64	+ 0 ,15	+ 0 ,10	+ 0 ,13
(5)		6 ,77	6 ,50	6 ,63	+ 0 ,22	+ 0 ,02	+ 0 ,12
(6)	Dernier quartier.	6 ,42	6 ,43	6 ,43	— 0 ,13	— 0 ,05	— 0 ,08
(7)		6 ,59	6 ,40	6 ,49	+ 0 ,04	— 0 ,08	— 0 ,02
Moyenne des huit valeurs relatives aux différentes phases lunaires.		6°,55	6°,48	6°,51			

TABLEAU V.

Variation de la température de l'air dépendante des phases de la lune.

	Phases de la lune.	Température moyenne des vingt-quatre heures.	Température moyenne des heures de la nuit. (7 h. apr. m. à 5 h. av. m.)	Température moyenne des heures du jour. (7 h. av. m. à 5 h. apr. m.)	Oscillation diurne moyenne de la température.
(0)	Nouvelle lune.	— 0°,06	— 0°,02	— 0°,09	— 0°,04
(1)		+ 0,03	+ 0,05	— 0,02	— 0,08
(2)	Premier quartier.	— 0,01	— 0,03	0,00	+ 0,01
(3)		+ 0,03	+ 0,06	— 0,01	— 0,03
(4)	Pleine lune.	+ 0,01	— 0,04	+ 0,08	+ 0,13
(5)		+ 0,04	— 0,02	+ 0,09	+ 0,12
(6)	Dernier quartier.	— 0,02	0,00	— 0,06	— 0,08
(7)		— 0,03	— 0,02	— 0,03	— 0,02

Batavia, 9 juillet 1878.

SUR LE

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION,

PAR

G. F. W. BAEHR.

---

1. Le calcul des variations donne pour la variation d'une intégrale définie, quand la variable indépendante ne varie pas, la formule

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V\,dx = L + \int_{x_0}^{x_1} (K\,\delta y + K'\,\delta z + \ldots)\,dx;$$

lorsque V contient x, des fonctions y, z,.. de cette variable indépendante et seulement leurs dérivées premières y', z', on a

$$K = \frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dy'},$$

$$K' = \frac{dV}{dz} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dz'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les dérivées par rapport à x sont totales.

Dans ce qui suit on ne considère point de conditions particulières relatives aux limites, qui resteront fixes, de sorte que $L = 0$, et de plus on suppose que la question laisse prévoir qu'une intégrale soit ou maximum ou minimum quand sa variation est nulle. Alors, si y, z,... sont des fonctions indépen-

dantes entre elles, leurs valeurs en fonctions de x, qui rendront maximum ou minimum l'intégrale proposée, seront déterminées généralement par les équations différentielles simultanées

$$K = 0, \qquad K' = 0, \ldots\ldots\ldots$$

D'après cela soit à trouver la courbe, entre deux extrémités fixes, pour laquelle l'intégrale

$$\int \varphi(x, y, z)\, ds \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ds désignant l'élément de l'arc, ou, prenant x pour variable indépendante, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, z) \frac{ds}{dx}\, dx$$

sera un minimum.

On aura les équations

$$\frac{d\varphi}{dy}\frac{ds}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz}\frac{ds}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi\frac{dz}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = 0,$$

ou, développant les seconds termes,

$$\frac{d\varphi}{dy}\frac{ds}{dx} - \frac{\frac{ds}{dx}\left[\varphi\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right] - \varphi\frac{dy}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}}{\frac{ds^2}{dx^2}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz}\frac{ds}{dx} - \frac{\frac{ds}{dx}\left[\varphi\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right] - \varphi\frac{dz}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}}{\frac{ds^2}{dx^2}} = 0,$$

où $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$ est la dérivée totale de φ, en y regardant y et z comme fonctions de x.

Remarquant que

$$\frac{ds}{dx}\frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\frac{d^2 z}{dx^2},$$

ces équations peuvent encore se réduire à

$$\frac{d\varphi}{dy}\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dx^2}}\left[\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right] = 0, \ldots (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dz}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dx^2}}\left[\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

où maintenant $\frac{d\varphi}{dx}$ est dérivée partielle. Multipliant alors la première par $1+\frac{dy^2}{dx^2}$ et la seconde par $\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}$, la somme des produits donne après réduction,

$$\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{ds^2}{dx^2}},$$

et analoguement on obtient

$$\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{ds^2}{dx^2}},$$

lesquelles sont les équations différentielles de la courbe.

Lorsque celle-ci est plane, une seule suffira; ainsi la première donne immédiatement pour la courbe dans le plan des xy, qui engendre une aire minimum en tournant autour de l'axe des x, si l'on y fait $\varphi = y$,

$$1+\frac{dy^2}{dx^2} = y\frac{d^2y}{dx^2},$$

ce qui est l'équation différentielle de la chaînette.

Mais ces équations, où φ est une fonction quelconque ne renfermant point de dérivées, admettent une solution générale, qui semble conduire de la manière la plus naturelle au principe de mécanique connu sous le nom de principe de la moindre action. En y considérant x, y et z comme des fonctions d'une certaine variable indépendante t, elles deviennent

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dy}{dt}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dt^2}}\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right],$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dz}{dt}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dt^2}}\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right],$$

et, sous cette forme, l'on voit tout de suite que l'on satisfait à ces équations en posant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\frac{d\varphi}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\frac{d\varphi}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi\frac{d\varphi}{dz},$$

pourvu que

$$\frac{ds}{dt} = \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ce qui est en effet une conséquence des trois dernières, lesquelles, multipliées respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, donnent en prenant la somme de ces produits

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Les équations (3) montrent que la courbe, pour laquelle généralement l'intégrale devient un minimum, est précisément la courbe qui serait décrite par un point matériel libre, sous l'action d'une

force dont $\frac{1}{2}\varphi^2$ serait la fonction des forces, et d'après (4) la fonction φ représente la vitesse de ce mouvement.

Réciproquement il suit de là le principe nommé: en effet, quand un point matériel libre est soumis à l'action d'une force motrice, dont X, Y et Z sont les composantes parallèles aux axes des coordonnées, si l'on y ajoute une force N normale à la trajectoire, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma,$$

où les cosinus des angles directeurs α, β et γ de la force normale doivent satisfaire à la condition

$$\cos\alpha\frac{dx}{dt} + \cos\beta\frac{dy}{dt} + \cos\gamma\frac{dz}{dt} = 0.$$

En donnant à N des valeurs différentes, on peut faire décrire au point des courbes différentes entre deux extrémités fixes, parce que les valeurs de x, y et z en fonctions de t contiendront deux constantes arbitraires, et quand

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d.\,\psi(x, y, z),$$

c'est-à-dire, qu'il y ait une fonction ψ des forces, en sorte que l'équation des forces vives subsiste, on aura, que N soit nul ou non, dans tous les cas pour la vitesse V la même fonction de x, y et z, savoir:

$$v^2 = 2\,\psi(x, y, z) + const.;$$

donc, si l'on fait dans (3)

$$\varphi^2 = 2\,\psi(x, y, z) + const.,$$

l'intégrale

$$\int\sqrt{2\,\psi(x, y, z) + const.}\,ds, \text{ ou } \int v\,ds$$

deviendra, en vertu de ce qui précède, généralement minimum pour des valeurs de x, y et z en fonctions de t, déterminées par

les mêmes équations, que si dans (5) on fait $N = 0$, ce qui constitue le principe de la moindre action pour le mouvement d'un seul point.

2. Pour faire une application analytique de ce principe, soit proposé de trouver la courbe pour laquelle l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{y^2 + z^2}\, ds$$

sera minimum.

Alors on a $\varphi = \sqrt{y^2 + z^2}$, et les équations (3) deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = z,$$

dont on a immédiatement les intégrales:

$$x = At + A_1, \quad y = Be^t + B_1 e^{-t}, \quad Z = Ce^t + C_1 e^{-t},$$

où, en vertu de (4), les constantes arbitraires sont liées par la relation

$$A^2 = 4\,BB' + 4\,CC' \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Eliminant t, on obtient pour les équations de la courbe les chaînettes

$$y = Be^{\frac{x-A'}{A}} + B_1 e^{-\frac{x-A'}{A}},$$

$$z = Ce^{\frac{x-A'}{A}} + C_1 e^{-\frac{x-A'}{A}},$$

dans lesquelles il reste encore cinq constantes arbitraires, tandis que l'on n'aurait que quatre équations pour les déterminer, si les valeurs de y et de z relatives aux limites x_0 et x_1 sont données. Il faut donc que l'on puisse réduire le nombre de ces constantes, et en effet, on peut écrire la première des équations précédentes sous la forme

$$y = \sqrt{B}\, B_1 \left[\sqrt{\frac{B}{B_1}}\, e^{\frac{x-A'}{A}} + \sqrt{\frac{B'}{B}}\, e^{-\frac{x-A'}{A}}\right],$$

ou, posant

$$\sqrt{B}\,B_1 = B', \quad \sqrt{\frac{B}{B_1}} = e^{-\alpha},$$

B' et α étant deux nouvelles constantes,

$$y = B'\left[e^{\frac{x-A'-\alpha}{A}} + e^{-\frac{x-A'-\alpha}{A}}\right],$$

et de la même manière la seconde se réduit à

$$z = C'\left[e^{\frac{x-A'-\beta}{A}} + e^{-\frac{x-A-\beta}{A}}\right],$$

tandis que la relation (a) devient

$$A^2 = 4\,B' + 4\,C',$$

de sorte qu'il n'y a en tout que cinq constantes A, B', C', $A' + \alpha$ et $A' + \beta$, que l'on pourra déterminer si les coordonnées des points extrêmes sont données. Si ces points sont dans un même plan avec l'axe des x, la courbe sera la courbe plane qui par révolution autour de cet axe engendre la surface minimum.

Soit à trouver la brachistochrone pour un point pesant. Prenant l'axe des z dans le sens de la pesanteur, l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{(z-z_0)}},$$

où z_0 et z_1 sont les ordonnées du point de départ et du point d'arrivée, devra être minimum. Ici l'on a

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(z-z_0)}},$$

et les équations (3) deviennent:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{2\,(z-z_0)^2},$$

dont les deux premières montrent que la courbe sera plane; on peut donc supposer qu'elle soit située dans le plan des xz, et

laisser de côté la deuxième équation. Les deux autres donnent alors

$$\frac{dx}{dt} = A, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{1}{z - z_0} + B,$$

et, en vertu de (4) on aura

$$A^2 + B = 0 \qquad \text{ou } B = -A^2,$$

donc

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{1 - A^2 (z - z_0)}{z - z_0}},$$

et par suite

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{1 - A^2 (z - z_0)}{A^2 (z - z_0)}},$$

ce qui est l'équation différentielle de la cycloïde.

Pour la courbe dont le moment d'inertie par rapport à l'axe des x est un minimum on aura: $\varphi = y^2 + z^2$, et elle sera déterminée par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2(y^2 + z^2)y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2(y^2 + z^2)z,$$

dont les deux dernières montrent que sa projection sur le plan des yz sera la courbe décrite par un mobile, sous l'action d'une force centrale répulsive et proportionnelle à la troisième puissance de la distance, l'origine étant le centre de la force. La première donne

$$\frac{dx}{dt} = A,$$

et, éliminant au moyen de celle-ci la variable t dans les deux dernières, on obtient

$$A^2 \frac{d^2 y}{d x^2} = 2 y (y^2 + z^2),$$

$$A_2 \frac{d^2 z}{d x^2} = 2 z (y^2 + z^2),$$

pour les équations différentielles de la courbe.

3. Si les fonctions y et z sont assujetties à satisfaire à une équation

$$F(x, y, z) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

on a, au lieu des deux équations $K = 0$ $K' = 0$, pour la condition du maximum ou minimum, l'équation

$$K' \frac{dF}{dz} - K' \frac{dF}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Ainsi, quand dans l'intégrale (1) les fonctions y et z doivent satisfaire à (6), l'équation (7) sera la différence des produits de la première (2) par $\frac{dF}{dz}$ et de la seconde (2) par $\frac{dF}{dy}$, ce qui, ayant égard à ce que (6) donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

se réduit alors à:

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\frac{dF}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dz}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dz}\right) = \ldots$$

$$\ldots \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dx^2}} \left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dF}{dz} - \frac{d^2 z}{dx^2}\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\frac{dF}{dx}\right],$$

ou, en considérant x, y et z comme des fonctions d'une certaine variable indépendante t, à

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{dF}{dy}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\frac{dF}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dz}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dx}\right)\frac{dz}{dt} = \ldots$$

$$\ldots \frac{\varphi}{\frac{ds^2}{dt^2}} \left[\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\frac{dF}{dz} - \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dF}{dy}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dF}{dx} - \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{dF}{dz}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{dF}{dy} - \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{dF}{dx}\right)\right].$$

L'on voit tout de suite qu'il sera satisfait à cette équation, en posant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dx} + \lambda \frac{dF}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dy} + \lambda \frac{dF}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dz} + \lambda \frac{dF}{dz},$$

λ étant une fonction inconnue, pourvu que l'on prenne

$$\frac{ds}{dt} = \varphi,$$

ce qui s'accorde avec les trois précédentes équations, qui donnent

$$\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ces équations sont précisément celles du mouvement d'un point matériel qui doit se mouvoir sur une surface $F = 0$, sous l'action d'une force pour laquelle $\frac{1}{2}\varphi^2$ est la fonction des forces, et la fonction donnée φ est alors la vitesse de ce mouvement. Réciproquement on conclut de là, comme dans le cas du point libre, au principe de la moindre action pour le mouvement d'un mobile sur une surface fixe, c'est-à-dire: lorsqu'un point matériel, assujetti à rester sur une surface fixe, est soumis à l'action de forces pour lesquelles l'équation des forces vives à lieu, l'intégrale $\int v ds$, prise entre deux extrémités fixes, sera généralement moindre pour la courbe qu'il décrit, qu'elle ne le serait pour toute autre courbe terminée aux mêmes points, et qu'il décrirait sur cette surface, si l'on ajoutait des forces normales à la trajectoire, ce qui ne change pas l'expression pour la vitesse.

Soit à trouver la brachistochrone pour un point pesant assujetti à se mouvoir sur la surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Prenant l'axe des z dans le sens de la pesanteur, et désignant par z_0 et z_1, les ordonnées des points extrêmes, l'intégrale qui doit être minimum sera encore

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{z - z_0}},$$

donc

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{z - z_0}} = \frac{ds}{dt},$$

et les équations (8) deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \qquad\qquad + \lambda \frac{dF}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \qquad\qquad + \lambda \frac{dF}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{z(z - z_0)} + \lambda \frac{dF}{dz};$$

éliminant λ entre les deux premières, l'on obtient

$$\frac{dF}{dy}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Si la surface est de révolution autour de l'axe des z, on a

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \varphi(z),$$

de sorte que la dernière équation donne dans ce cas

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \text{C(onst.)},$$

ou, éliminant t,

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C : \frac{ds}{dt},$$

c'est-à-dire :

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C\sqrt{(z - z_0)}.$$

Si dans celle-ci l'on introduit la vitesse v du mouvement dans la courbe sous l'action de la pesanteur, on a

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z - z_0)} = v,$$

et l'équation précédente devient

$$y\,dx - x\,dy = \frac{C}{\sqrt{2g}} v^2\,dt,$$

laquelle exprime la propriété connue de la brachistochrone, que l'aire décrite à chaque instant par la projection du rayon vecteur sur un plan horizontal est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.

4. On obtient beaucoup plus simplement les résultats précédents, si l'on introduit d'abord une nouvelle variable indépendante t.

L'intégrale (1) devient alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, z) \frac{ds}{dt} dt,$$

et les conditions pour le maximum ou minimum sont

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{ds}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\varphi \frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$\frac{d\varphi}{dy}\frac{ds}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\varphi \frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz}\frac{ds}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\varphi \frac{dz}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = 0,$$

où

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

A ces équations on peut joindre une relation arbitraire entre une des variables et l'indépendante t, ou entre x, y, z et t.

Remarquons aussi que si l'on développe leurs seconds termes, et qu'ensuite on les multiplie respectivement par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, la somme des produits donne l'identité

$$\frac{d\varphi}{dt}\frac{ds}{dt} - \varphi\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\varphi}{\frac{ds}{dt}} = 0.$$

Si donc on prend

$$\frac{ds}{dt} = \varphi,$$

ce qui met en évidence la propriété mécanique de la courbe cherchée, on obtient, développant les seconds termes de (b) et transposant, immédiatement les équations (3).

Désignant respectivement par K, K', K'' les premiers membres de (b), la partie de la variation de l'intégrale, qui reste sous le signe intégral, est

$$K\delta x + K'\delta y + K''\delta z;$$

lorsqu'il n'y a pas de relation générale entre x, y et z, les variations δx, δy et δz sont indépendantes entre elles, et chaque terme séparément doit être égalé à zéro, pour les conditions du maximum ou minimum; mais quand ces fonctions doivent satisfaire à une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'on doit avoir

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0;$$

employant alors la méthode des facteurs indéterminés, on aura pour ces conditions

$$K + \lambda \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$K' + \lambda \frac{dF}{dy} = 0,$$

$$K'' + \lambda \frac{dF}{dz} = 0;$$

l'élimination de λ donnera deux équations, qui avec $F = 0$, déterminent x, y, et z, en fonction de t.

Ici on peut encore prendre, sans qu'il y ait contradiction,

$$\frac{ds}{dt} = \varphi,$$

et si l'on développe alors les seconds termes dans K, K' et K'', on obtient immédiatement les équations (8).

5) Soient dans l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots) \sqrt{\Sigma m \left(\frac{dx^2}{dt^1} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}\, dt \ldots (c)$$

où l'on donne sous le signe Σ simultanément les indices 1, 2, 3 ... aux constantes m et aux variables x, y et z, les variables x_1, y_1, z_1, x_2, ... des fonctions de t, tandis que φ ne contient point de dérivées, et supposons que ces fonctions doivent satisfaire à quelques équations de condition

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots . F_k = 0;$$

alors leurs valeurs, en fonctions de t, pour lesquelles l'intégrale peut devenir un maximum ou minimum, doivent, d'après les principes du calcul des variations, désignant le radical par σ, satisfaire aux équations:

$$\frac{d\varphi}{dx_1}\sigma - \frac{d}{dt}\frac{\varphi m_1 \frac{dx_1}{dt}}{\sigma} + \Sigma\,\lambda\frac{dF}{dx_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dy_1}\sigma - \frac{d}{dt}\frac{\varphi m_1 \frac{dy_1}{dt}}{\sigma} + \Sigma\,\lambda\frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz_1}\sigma - \frac{d}{dt}\frac{\varphi m_1 \frac{dz_1}{dt}}{\sigma} + \Sigma\,\lambda\frac{dF}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx^2}\sigma - \frac{d}{dt}\frac{\varphi m_2 \frac{dx_2}{dt}}{\sigma} + \Sigma\,\lambda\frac{dF}{dz_1} = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .,

où l'on doit, sous le signe Σ, donner des indices, de 1 à k, simultanément aux facteurs indéterminés λ et aux fonctions F. Si l'on développe les deuxièmes termes, et qu'on multiplie ensuite ces équations respectivement par les dérivées de x_1, y_1, z_1, x_2.... par rapport à t, la somme des produits donnera, ayant égard aux équations de condition, l'équation identique:

$$\frac{d\varphi}{dt}\sigma - \varphi\frac{d\sigma}{dt} - \sigma^2\frac{d}{dt}\frac{\varphi}{\sigma} = 0,$$

de sorte que pour déterminer les fonctions inconnues on peut prendre entre les variables x_1, y_1... encore une relation arbitraire qui contient t.

Si donc on pose: $\varphi = \sigma$, ou

$$\varphi = \sqrt{\Sigma\, m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}, \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

on obtient, développant les deuxièmes termes et transposant,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dx_1} + \Sigma \lambda \frac{dF}{dx_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{d t^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dy_1} + \Sigma \lambda \frac{dF}{dy_1},$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{d t^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dz_1} + \Sigma \lambda \frac{dF}{dz_1},$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} = \varphi \frac{d\varphi}{dx_2} + \Sigma \lambda \frac{dF}{dx_2},$$

. . . . . .

. . . . . .

d'où inversement

$$\Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

ce qui s'accorde avec (d).

Ces équations sont celles du mouvement d'un système de points matériels m, à liaisons données par les fonctions $F = 0$, et sous l'action de forces dont $\frac{1}{2} \varphi^2$ serait la fonction des forces.

Réciproquement, si dans un tel système les composantes des forces, parallèles aux axes des coordonnées, sont les dérivées d'une fonction $\psi (x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots)$ seulement des coordonnées de ces points, on aura, v désignant la vitesse, l'équation des forces vives,

$$\Sigma m v^2 = 2 \psi (x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) + \text{C(onst.)},$$

et cette expression, comme dans le cas d'un point libre, ne changera pas si l'on ajoute, sans changer les liaisons, des forces normales aux trajectoires des différents points. Par l'introduction de ces forces les trajectoires changeront, mais on pourra les faire passer par les mêmes points extrêmes, parce que chaque coordonnée, exprimée en fonction du temps, contiendra deux constantes arbitraires.

Si donc on prend

$$\varphi = \sqrt{2\,\psi\,(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) + C},$$

il suit, de ce qui précède, que l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2\,\psi(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) + C} \sqrt{\Sigma m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)} dt \ldots (f)$$

qui acquiert des valeurs différentes suivant qu'on ajoute des forces normales différentes, sera, généralement parlant, minimum lorsqu'il n'y a pas de forces ajoutées, parce qu'alors les valeurs de x_1, y_1, z_1, $x_2 \ldots$ en fonctions du temps t sont déterminées par les mêmes équations que les équations (e) lesquelles donnent le minimum l'intégrale (c).

A la place de (f) on peut aussi écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\Sigma m v^2} \sqrt{\Sigma m \frac{ds^2}{dt^2}} dt,$$

ds étant l'élément de la courbe décrite par un point du système, ou encore

$$\int_{t_1}^{t_1} \Sigma m v^2 \, dt,$$

ou bien, si pour éliminer le temps on change, dans chaque terme sous le signe Σ, $v\,dt$ en ds,

$$\Sigma \int m v \, ds,$$

où il convient d'écrire le signe Σ devant le signe intégral, parce qu'après l'élimination du temps les intégrales n'ont plus les mêmes limites.

Le minimum de cette somme d'intégrales, qui, lorsque les forces appliquées à un système à liaisons sont les dérivées d'une fonction des coordonnées des points, a généralement lieu quand le système passe d'une position à une autre sous l'action de ces forces seules, constitue le principe de la moindre action pour un système de points.

Delft, Avril 1879.

LE
TÉLÉMÉTÉOROGRAPHE D'OLLAND,

DÉCRIT PAR

M. SNELLEN,

Directeur de l'observatoire météorologique d'Utrecht.

(Voir Pl. VI.)

En 1868, M. le professeur Buys-Ballot exprimait le vœu de pouvoir suivre d'un coup d'œil, à Utrecht, les variations simultanées de l'état de l'atmosphère dans les différentes stations météorologiques des Pays-Bas [1]). Qui aurait osé supposer que dix années s'écouleraient à peine sans que ce vœu fût devenu une réalité! Et pourtant, l'instrument dont la description fournira la matière du présent article offre la solution complète du problème. Rappelons d'abord brièvement, en guise d'introduction, comment cet appareil a pris naissance.

En 1874, M. le professeur E. H. von Baumhauer, ayant réfléchi au principe d'après lequel pourrait être construit un semblable appareil, fit connaître ses vues dans un Mémoire intitulé: „Sur un météorographe universel destiné aux observatoires solitaires" [2]). La lecture de cet article, jointe à celle de la description du météorographe de M. van Rysselberghe, de Gand [3]), raviva chez M. Olland, fabricant d'instruments de précision à Utrecht, le désir déjà ancien d'exécuter un appareil à l'aide duquel l'indication

---

[1]) Voir: *De invoering en verklaring van den Aëroklinoskoop, door* Dr. Buys-Ballot, Utrecht, 1868.

[2]) *Archives néerland. des sciences exactes et natur.*, t. IX, pag. 230 et suiv.

[3]) *Notice sur un système météorographique universel*, par M. F. van Rysselberghe, professeur à l'Ecole de navigation de l'Etat à Ostende; Bruxelles, 1873. Extrait des *Bull. de l'Ac. roy. de Belg.*, t. XXXVI, p. 9.

d'un instrument pût être transmise automatiquement à une distance quelconque. M. Olland crut avoir trouvé le moyen d'obtenir ce résultat, et il se proposa de l'appliquer d'abord à l'enregistrement des variations de niveau des eaux. A cet effet, il adressa au Ministre de l'intérieur, en janvier 1875, une lettre par laquelle il demandait à être mis dans l'occasion d'exposer ses idées et de construire un appareil à titre d'essai. Il donnait en même temps l'assurance que son système se prêterait, tout aussi bien, à l'inscription des indications des instruments météorologiques. Cette dernière idée fut effectivement réalisée, car l'Académie des sciences d'Amsterdam, ayant été consultée par le Ministre au sujet de la susdite requête et ayant émis un avis favorable, la construction d'un appareil météorologique fut confiée à M. Olland. Cet appareil devait inscrire, dans le cabinet du Directeur en chef de l'Institut royal météorologique, les indications d'un baromètre et d'un anémomètre placés au sommet de la tour de la cathédrale d'Utrecht; la condition était imposée, en outre, que ces deux stations ne seraient reliées entre elles que par un seul fil télégraphique.

M. Olland se mit à la besogne, mais éprouva au début quelques déceptions, ainsi qu'il arrive généralement pour toute œuvre nouvelle. Une partie essentielle de l'appareil était formée par deux systèmes de roues dentées, un à chaque station (tour et institut), qui devaient avoir un mouvement isochrone; or, tous les efforts pour obtenir cet isochronisme au moyen d'un fil unique semblaient devoir échouer, bien qu'avec deux fils la solution ne fût pas difficile. Les choses en étaient là, lorsque M. von Baumhauer, qui venait d'être nommé président de la Commission néerlandaise à l'Exposition de Philadelphie de 1876, se mit en rapport avec M. Olland et le chargea de construire pour l'Exposition, d'après le principe exposé dans son Mémoire, un modèle de l'appareil, celui-ci dût-il fonctionner avec un double fil. Un appareil de ce genre fut effectivement envoyé à Philadelphie, où il obtint la médaille.

En ce qui concerne la réunion des deux stations par *un seul* fil télégraphique, il n'avait donc par encore été satisfait au mandat donné par l'Académie des sciences, et M. Olland désespérait presque

de pouvoir l'exécuter, lorsque l'idée lui vint de réaliser le mouvement isochrone des deux engrenages au moyen de pendules coniques. L'essai réussit complétement, et il en résulta un appareil qui, livré à l'Institut météorologique, y fonctionne depuis un an et demi avec une régularité parfaite. Il satisfait si bien sous tous les rapports, que le Directeur en chef de l'Institut, M. Buys-Ballot, a cru devoir proposer au Gouvernement d'établir en quatre stations éloignées, convenablement choisies aux extrémités du pays et reliées par des fils à la station centrale, des appareils semblables à celui qui occupe maintenant la tour de la cathédrale d'Utrecht.

Un second exemplaire de l'appareil a figuré à l'Exposition internationale de Paris de 1878; l'appareil de M. Olland est donc le premier dans lequel ait été résolu le problème, car, bien qu'en Belgique le gouvernement ait accordé les fonds pour installer dans ce pays des instruments analogues d'après le principe de M. van Rysselberghe, et qu'on s'y occupe de leur fabrication, l'enregistrement à distance des phénomènes météorologiques ne s'y fait pas encore jusqu'ici.

Les services qui peuvent être demandés à un télémétéorographe sont de deux sortes. On peut se proposer, en effet, d'obtenir des observations d'une station qui n'est pas accessible à toutes les époques de l'année („station solitaire" de M. von Baumhauer), par exemple du sommet d'une haute montagne, bien que l'installation du moins de quelques instruments aurait encore à vaincre de fort grandes difficultés; la partie de l'appareil qui comprend les instruments météorologiques (baromètre, thermomètre, girouette, anémomètre, etc.) doit alors se suffire à elle-même pendant au moins six mois, n'avoir aucun besoin de la main de l'homme durant ce laps de temps. Ou bien, en un lieu déterminé (station centrale), on veut recevoir des indications simultanées de une ou plusieurs stations situées à une distance plus ou moins considérable. Cette seconde condition est moins embarrassante que la première; l'appareil placé à la

---

[1]) Voir la brochure citée, p. 24.

station éloignée peut alors recevoir la visite de l'homme, par exemple pour être remonté, et au besoin corrigé, à des intervalles réguliers; il doit toutefois être d'une construction très simple, de manière à ne pas éprouver facilement des dérangements nécessitant l'intervention d'un mécanicien, qui peut-être ne se trouverait pas sur les lieux. L'appareil de M. Olland satisfait à l'une et à l'autre de ces deux exigences. Bien que dans les modèles exécutés on n'ait pas visé à ce résultat, il est facile de disposer le mécanisme de façon qu'il n'ait besoin d'être remonté que deux fois par an, ou même tous les ans seulement; les derniers perfectionnements introduits permettent même de gouverner tout l'appareil sans quitter la station centrale.

Ainsi qu'on l'a déjà fait pressentir dans ce qui précède, l'appareil se compose de deux parties, placées respectivement aux deux stations. La station éloignée contient les instruments dont on veut connaître les indications, lesquelles doivent de là être transmises à l'autre station par le fil qui les relie. A des intervalles déterminés, par exemple tous les quarts d'heure, il est donc envoyé une dépêche marquant l'état de l'atmosphère au moment donné. Pour cette raison, cette partie de l'appareil prend le nom de *transmetteur*. A la station centrale se trouve l'autre partie, qui sert uniquement à recevoir et à rendre en caractères intelligibles la dépêche de la station éloignée. Cette partie s'appelle le *récepteur*.

Le mode d'enregistrement est celui proposé dans la brochure de M. von Baumhauer, et pour une partie celui employé par M. van Rysselberghe, au moins en ce qui concerne ses instruments à aiguille.

Un exemple fera mieux comprendre la manière dont fonctionnent les deux parties de l'appareil. Supposons qu'il s'agisse de faire connaître à la station centrale, de quart d'heure en quart d'heure, la hauteur du baromètre. Pour cela, il faut en premier lieu que l'instrument soit d'une construction appropriée au but. M. Olland emploie un baromètre à balance. La languette du fléau, sous l'influence des oscillations barométriques, fait tourner une aiguille à droite ou à gauche sur un cadran divisé. Les

traits de cette division sont travaillés *en relief;* ils font donc saillie, sous forme de dents. L'aiguille se place successivement en face d'autres dents, de sorte qu'on pourrait déjà lire directement, à simple vue, la hauteur barométrique. Pour la transmettre toutefois à l'autre station, il y a sur le prolongement de l'axe de l'aiguille un second axe, qui porte un bras métallique (le bras observateur) pourvu d'un ressort léger en platine. Tous les quarts d'heure, un engrenage fait accomplir à ce bras une révolution (d'une durée d'environ 70 secondes), pendant laquelle le ressort en platine touche successivement chacune des divisions du cadran et en outre l'aiguille du baromètre, qui se trouve quelque part entre deux de ces divisions ou précisément en face de l'une d'elles. Si maintenant l'aiguille et le cadran sont reliés à l'une des électrodes d'une pile galvanique, dont l'autre pôle communique avec le bras observateur, le circuit sera fermé chaque fois que le ressort en platine touchera soit une division, soit l'aiguille. Le courant se rend alors par le fil de ligne à la station centrale, où il parcourt l'hélice d'un électro-aimant dont l'armature porte un style traceur. En face de ce style se trouve un cylindre, qui tourne exactement une fois sur lui-même pendant que le bras observateur fait une révolution, de sorte qu'à chaque fermeture du courant un petit trait bien distinct est tracé sur le papier satiné, noirci à la fumée de lampe, qui entoure le cylindre. Pendant le mouvement isochrone du bras observateur et du cylindre enregistreur, il s'inscrit à la surface de celui-ci une série de petits traits situés tous à la même distance l'un de l'autre, et qui correspondent aux millimètres de l'échelle barométrique; mais, entre ces traits, ou en coïncidence avec l'un d'eux, il y en a un qui résulte du contact du bras observateur avec l'aiguille du baromètre, et qui reproduit par conséquent la position de cette aiguille entre les divisions de l'échelle ou sur l'une d'elles. C'est là un des avantages de l'appareil de M. Olland, qu'à chaque inscription il ne donne pas seulement l'indication de l'instrument, mais en outre l'échelle tout entière.

Ce qui vient d'être dit du baromètre s'applique aussi aux autres instruments. Leurs aiguilles se promènent toutes sur le même cadran; seulement, pour qu'elles ne puissent jamais se gêner mutuellement dans leur marche, il est assigné à chacune d'elles un arc déterminé, sur lequel elle doit rester. Le bras observateur, arrivant donc successivement en contact avec chaque aiguille et avec son échelle, transmet la lecture de chacun des instruments au cylindre de la station centrale, et cela en une durée de temps inférieure à 1 minute et demie.

En suivant cet exposé du fonctionnement général à chaque observation, on aura remarqué que l'appareil doit se composer:

1°. A la station centrale, ou station I, de:

a. Une horloge, n'ayant d'autre travail à exécuter que de fermer à des intervalles déterminés, d'un quart d'heure par exemple, un courant, qui donne le branle à tout l'appareil.

b. Un engrenage, qui, mis en mouvement par la fermeture du courant, fait tourner, dès que son mouvement est devenu uniforme, le cylindre enregistreur.

2°. A la station éloignée, ou station II, de:

c. Un engrenage tout pareil, qui commence à marcher au même instant, et qui communique au bras observateur un mouvement isochrone à celui du cylindre de la station I.

d. Les instruments météorologiques avec leurs aiguilles.

Chacune de ces parties va maintenant être l'objet d'une description plus détaillée.

L'horloge régulatrice et la distribution du courant.

Pour faciliter l'intelligence des descriptions qui vont suivre, les différentes parties du télémétéorographe ont été représentées sur la Pl. VI; au côté gauche de la planche se trouvent figurés les appareils de la station I, au côté droit ceux de la station II. Dans toutes ces figures, les mêmes lettres ont la même signification.

Sur un solide cadre en fonte A. A. A. sont fixées les différentes parties du récepteur, ainsi que l'horloge régulatrice. Celle-ci, qui est indiquée par la lettre B, ne se distingue d'une horloge ordinaire à pendule qu'en ce que l'axe C_1 de l'aiguille des minutes est prolongé au-delà de la platine d'arrière, où il porte un disque de laiton C, dont la circonférence est pourvue de 4 entailles; tous les quarts d'heure, l'une des extrémités a_1 d'un levier coudé a, qui peut tourner autour de l'axe a_2, est donc poussée dans une de ces entailles, ce qui ferme un courant par lequel les appareils des deux stations sont mis en mouvement. Voici comment ce résultat est obtenu.

Chaque fois que l'extrémité a_1 de a tombe dans une entaille, la vis a_3 est pressée sur l'extrémité du ressort b, qui alors vient toucher la lame de contact en b_2. Le courant peut alors passer et va, en premier lieu, déclencher l'engrenage de chaque station. La roue à entailles continuant à tourner, le courant est de nouveau interrompu, sans toutefois que sa tâche soit déjà accomplie. Il doit encore, en second lieu, servir à déclencher le cylindre à la station centrale et en même temps le bras observateur à la station éloignée, afin que ces organes puissent commencer leur révolution; en troisième lieu, il doit passer par l'hélice de l'électro-aimant qui meut le style traceur, ainsi que par le bras observateur et le cadran. A cet effet, le circuit est divisé à chaque station en trois branches, dans chacune desquelles sont intercalés les appareils que le courant doit successivement parcourir. On aura une idée nette de la marche du courant en jetant un coup d'œil sur les figures schématiques V et VI dont la première représente la station centrale, la seconde la station éloignée.

A la station centrale se trouve la pile galvanique, dont l'une des électrodes est dérivée vers la terre, tandis que l'autre est reliée, au moyen d'une vis de serrage, à une borne en laiton bien isolée k, qui est encore pourvue de trois autres vis de serrage. D'une seconde borne semblable k_1, le courant se rend par le fil de ligne à la seconde station, où se trouvent également deux

pareilles bornes, l'une k_2 en communication avec le fil de ligne, l'autre k_3 en rapport avec la terre. Pour passer à chaque station d'une borne à l'autre, le courant peut suivre trois voies différentes, selon la position que prend à chaque station une roue dont nous devons maintenant parler, la roue de distribution. Cette roue, représentée pour la station I par H, pour la station II par H_2, est montée sur l'un des axes de l'engrenage, et se met donc à tourner dès que la première fermeture de courant a été effectuée par l'horloge; le nombre des dents de l'engrenage est calculé de manière que la roue de distribution n'accomplit qu'un seul tour pendant la durée d'une observation, et qu'ainsi elle se retrouve à la fin dans la même position qu'au commencement.

Les trois voies, dont il a été question ci-dessus, sont indiquées à la station centrale par:

1° k—b_2—b_1 — autour de E — vers k_1
2° k—c —c „ „ F „ k_1
3° k—d_3—d_3 „ „ G „ k_1,

et à la station d'expédition par:

1° k_2—c_2—c_2 — autour de E_1 — vers k_3
2° k_2—c_3—c_3 „ „ F_1 „ k_3
3° k_2—V—W — vers k_3.

Aux deux stations la roue de distribution est représentée à l'état de repos. A la station I, la position de la roue C, centrée sur l'axe des minutes, montre que l'observation est sur le point de commencer; pour peu, en effet, que cette roue continue à avancer, a_1 tombe dans une de ses encoches et la première branche du circuit est fermée; dans cette branche se trouve l'électro-aimant E, qui déclenche l'engrenage. A la station II, pendant l'état de repos, une petite pièce d'ébonite n_1 presse sur le ressort v_3, de sorte que là aussi la première branche peut être parcourue; de même qu'à la station I, cette branche comprend un électro-aimant E_1, qui lève l'arrêt de

l'engrenage aussitôt que son hélice est traversée par un courant. Les deux appareils commenceront donc à se mouvoir au même instant.

Après un temps très court, le contact en b_2 est de nouveau rompu à la station I. D'autre part, les deux roues de distribution ont marché suffisamment pour qu'à la station II le bouton d'ébonite n_1 abaisse le ressort v_2, ce qui fait naître un contact en $c_3\, c_3$; de la même manière, un contact s'établit en $c\, c$ à la station I. Le courant parcourra donc maintenant, à chacune des deux stations, le second circuit, et il mettra par conséquent en action les électro-aimants F et F_1, d'où résultera à la station I le déclenchement du cylindre $S\,S_1$, et à la station II celui de la roue L_2, dont l'axe porte le bras observateur. La pièce d'ébonite n_1 de la station II est un peu plus longue que son analogue de la station I, de sorte qu'au premier endroit le contact est déjà établi avant que le courant soit fermé à la station centrale; ici le bouton est très court et par suite le courant ne dure qu'un instant, ce qui est toutefois très suffisant, vu qu'il sert seulement à dégager de leurs arrêts le cylindre et le bras observateur.

L'engrenage continuant à marcher, la roue de distribution de la station I arrive dans une position telle que le ressort d_1 est pressé contre d_3 et que par conséquent le contact est établi; la troisième branche, dans laquelle se trouve l'électro-aimant C du style traceur, entre donc dans le circuit, et dès qu'à la station II le bras observateur W touche une des divisions de l'échelle V ou l'aiguille d'un des instruments, le courant est fermé et le style trace une marque sur le cylindre.

La réprésentation schématique entraîne des inexactitudes qui peut-être occasioneraient des difficultés au lecteur. Ainsi à la station I le cylindre est représenté une fois debout, l'autre fois renversé. A la station II on doit se figurer que la partie W W_2 V se trouve en avant de la roue L_2, car le bras observateur W est fixé à l'axe de cette roue, tandis que celui de l'aiguille W_2 se trouve dans son prolongement.

Lorsque le cylindre enregistreur a presque achevé une révolution, le ressort *d* redevient libre à la station I, et par suite aucune inscription ne peut plus se faire; en même temps, le bras observateur a aussi exécuté presque un tour entier et a par conséquent parcouru les échelles des différents instruments. Les deux appareils arrivent alors bientôt à l'état de repos, mais, quand cela a lieu, le ressort v_3 est abaissé par la saillie n_1, de sorte que l'appareil de la station II se trouve de nouveau prêt pour l'observation suivante.

Engrenage de la station I, avec pendule conique et cylindre enregistreur.

Après avoir expliqué dans le paragraphe précédent la marche du courant, il faut maintenant étudier de plus près les deux appareils, ce qui fournira en même temps l'occasion de mieux apprécier le rôle qu'y joue le courant galvanique. Remarquons, tout d'abord, que ce courant est seulement nécessaire à expédier les indications de la station éloignée à la station centrale. L'appareil de la première de ces stations forme un tout indépendant, sur lequel on peut lire l'état des divers instruments. Cet état doit ensuite être transmis à la station centrale, et c'est à cela que servent le fil conducteur et le courant galvanique.

Dès que l'horloge régulatrice a fermé le courant, celui-ci suit la première des trois branches sus-mentionnées et parcourt donc aussi l'hélice de l'électro-aimant E. L'armature *e* est alors attirée, et le levier coudé à trois branches e e_1 e_2 opère une rotation à gauche, dans laquelle le doigt e_1 lâche la came *g* dont est muni l'axe vertical *l*, de sorte que l'engrenage D n'est plus empêché d'obéir à l'action de son poids moteur assez lourd. Le dernier axe de cet engrenage porte en effet la roue conique L_1, dont les dents engrènent avec celles du pignon l_1. L'avant-dernier axe porte la *roue de distribution* H, déjà mentionnée plus haut, qui à proprement parler consiste en deux roues indé-

pendantes l'une de l'autre et pouvant glisser sur l'axe. Celle des deux qui est placée en arrière, ou en dedans, sert uniquement à empêcher que l'engrenage, une fois mis en mouvement par le courant qui a déclenché le doigt e_1, ne soit de nouveau arrêté, aussitôt que le courant est interrompu, par une nouvelle rencontre de ce doigt avec la came g de l'axe l. A cet effet, la roue en question est pourvue d'une encoche dans laquelle repose, à l'état représenté par la figure, le doigt e_4. Lorsque l'armature e est attirée, e_2 est retiré latéralement et maintenu dans cette position aussi longtemps que le courant traverse l'hélice de E; mais, en l'absence du courant, e_1 reprendrait son ancienne position, et par suite g et l'engrenage seraient de nouveau arrêtés. Cela ne peut avoir lieu toutefois, parce que, au moment où le courant s'interrompt, la roue H est déjà assez avancée dans sa révolution pour que l'encoche ne se trouve plus en face de e_4; ce doigt, au lieu d'occuper sa position première, sera donc pressé latéralement contre la roue, et par conséquent la came g ne sera pas retenue non plus; l'axe l, qui porte cette came, pourra donc continuer librement à se mouvoir, jusqu'à ce que, après une révolution de H, le doigt e_4 retombe dans son ancienne position.

L'axe l, mis en mouvement, fait tourner le bras f qui y est fixé, ainsi que le poids Q du pendule conique, dont le point de suspension se trouve à une distance notable au-dessus de D, dans le prolongement de l'axe l. A mesure que la vitesse devient plus grande, le poids Q s'écarte de l'axe, et il atteint bientôt une position d'équilibre, telle qu'un mouvement de rotation uniforme soit communiqué à tout l'engrenage et par conséquent aussi à l'axe l. Pour obtenir rapidement ce résultat, M. Olland a imaginé une disposition très ingénieuse. L'axe de la roue de distribution porte au côté antérieur un petit bras T, qui fait donc un tour à chaque inscription. Sur ce bras repose l'extrémité, taillée en double plan incliné, d'un levier K, dont le centre de rotation est à gauche et qui porte en i un poids Q_1. Dès que l'engrenage est déclenché, le bras T est pressé latéralement par le

plan incliné, et par conséquent l'action du poids moteur se trouve augmentée; cet effet ne dure toutefois que pendant une petite partie de la rotation de T, à savoir, aussi longtemps qu'il est nécessaire pour donner à l'axe l la vitesse voulue, laquelle est ensuite entretenue par la seule action du poids moteur. Vers la fin de la rotation, T vient appuyer contre le plan incliné de gauche, et par là soulève de nouveau le levier K avec le poids Q_1. L'action revient donc à ceci: pendant la première partie de la rotation de T l'énergie de lieu du poids Q_1 est transformée en énergie de mouvement, ce qui donne rapidement au pendule conique la vitesse convenable, tandis que vers la fin de la rotation la force vive amassée dans le pendule soulève de nouveau le poids Q_1, de sorte que l'énergie de mouvement est alors convertie en énergie de lieu, qui sera utilisée pour l'observation suivante. Il suffit donc que le poids moteur ait la masse nécessaire pour entretenir la vitesse une fois acquise, le pendule se chargeant, avant d'arriver au repos, d'accumuler en Q_1 assez d'énergie potentielle pour que, lors de la révolution suivante, la vitesse exigée soit promptement obtenue.

Lorsque T est revenu dans sa position première, représentée par la figure, la roue de distribution, qui est portée sur le même axe, se retrouve aussi dans la position où e_4 tombe dans l'encoche de cette roue; e_1 bute donc de nouveau contre la came de l'axe l, et tout l'engrenage s'arrête. Pour qu'il n'en résulte pas de chocs nuisibles, le bras f n'est pas uni d'une manière immuable à l'axe l, mais seulement fixé à frottement, de sorte que le poids Q peut encore exécuter quelques révolutions avant de s'arrêter à son tour.

C'est aussi de cette manière qu'est fixé sur le même axe, à sa partie inférieure, le pignon dont les dents engrènent avec celles de la grande roue horizontale L_2, qui tourne autour de l'axe S_1; celui-ci est maintenu dans sa position verticale en haut par trois galets et en bas par un pivot; à son extrémité supérieure est fixé le porte-cylindre S, roue pourvue d'un rebord

dressé dans lequel le cylindre s'adapte exactement [1]). Lorsque l est mis en mouvement, le cylindre participerait donc immédiatement à la rotation, si la roue L_2, et par conséquent aussi le pignon qui engrène avec elle, n'était retenue par un bras h_1, qui bute contre une came h fixée à la roue. Pour dégager le cylindre, il faut que h_1 soit soulevé, ce qui a lieu aussitôt que l'armature h_2 de l'électro-aimant F est attirée. Nous avons déjà vu comment ce dernier effet se produit: l'électro-aimant F fait partie de la seconde branche du circuit et entre donc en action dès que le contact est établi en c (fig. V). Le cylindre, devenu libre, est alors entraîné jusqu'à ce que, au bout d'une révolution, la came h vienne de nouveau buter contre h_1.

Un instant après que le cylindre a été mis en mouvement, le troisième contact s'établit. La roue de distribution est en effet pressée latéralement par un ressort d_1, qui est muni en d d'une petite pièce isolante d'ébonite; à l'état de repos, d se trouve dans une rainure qui a été pratiquée, sur une petite longueur d'arc, dans la jante de la roue de distribution; par la rotation, le bouton d vient en face de la partie pleine de la roue et est alors un peu repoussé dans la direction opposée de celle indiquée par la flèche en d, ce qui fait appuyer le ressort contre la vis de contact d_3; cela dure jusqu'à ce que la roue ait à peu près achevé une révolution entière et que d soit de nouveau poussé dans la rainure [2]). Durant cet intervalle de temps, la troisième branche du circuit est donc fermée et l'occasion est offerte au courant de parcourir l'hélice de l'électro-aimant G, qui met en action le style traceur G_1.

Ce dernier électro-aimant peut glisser entre deux montants G_2 et G_3, dans l'intervalle desquels se trouve une tige P munie d'un filet de vis; l'écrou de cette vis est fixé à la monture de

---

[1]) Dans la figure le cylindre n'est pas représenté, afin de mieux faire voir les parties de l'instrument qui sont placées derrière lui.

[2]) Pour plus de clarté, le mouvement du ressort de contact a été représenté, dans la figure schématique, comme s'opérant de bas en haut et de haut en bas. En réalité, la disposition de l'appareil est telle qu'on l'a décrite ci-dessus.

l'électro-aimant, de sorte que, quand la vis tourne, l'électro-aimant monte ou descend. Le mouvement descendant est produit par l'horloge régulatrice; à cet effet, celle-ci fait tourner l'axe Z, qui, par le moyen des roues d'angle Z_1, Z_2 et Z_3, communique le mouvement à la roue Z_4, montée sur la tige de la vis P. Le mouvement de l'axe Z est calculé de manière que dans chaque quart d'heure, par conséquent d'une observation à la suivante, l'électro-aimant G s'abaisse de $\frac{1}{4}$ de millimètre, ce qui est juste assez pour que les signes tracés sur le cylindre soient suffisamment séparés l'un de l'autre. Lorsque l'aimant est enfin parvenu au bas de sa course, et que le papier du cylindre est par suite entièrement couvert de signes, l'aimant doit être remonté; pour cela, la roue Z_4 peut être un peu soulevée, ce qui permet à la main de tourner la vis et de ramener ainsi l'électro-aimant à sa position la plus élevée, afin que l'inscription puisse recommencer sur une nouvelle feuille de papier.

Voici donc, en résumé, ce qui s'observe à la station centrale, à chaque inscription. L'horloge régulatrice commence par fermer un courant, ce qui détermine la mise en mouvement de l'engrenage et du pendule conique; le poids Q_1 s'abaisse, et par là le pendule arrive bientôt à la vitesse requise; ensuite, le cylindre se met à tourner et on voit se faire l'inscription; celle-ci terminée, le cylindre s'arrête de nouveau, le poids Q_1 est soulevé, et tout rentre dans l'état de repos.

Engrenage de la station II, bras observateur et aiguilles des instruments.

L'engrenage de la station II est, quant à ses parties essentielles, conforme à celui de la station centrale. De même que dans celui-ci, une roue conique, montée sur le dernier axe, engrène avec un pignon l_1, qui met en mouvement un axe vertical l. Ce dernier, toutefois, est ici un peu plus court; au moyen d'un pignon,

qui y est fixé à frottement, le mouvement est communiqué à la grande roue dentée L_2, *roue d'observation*, tout comme il l'est au cylindre dans la station I. L'axe de cette roue porte le *bras observateur* W. L'axe *l* est relié, de la même manière qu'à l'autre station, au pendule conique Q.

La roue de distribution H_1, représentée séparément dans la figure VII, est aussi presque entièrement semblable à celle de la station centrale. Comme l'a déjà montré la figure schématique, cette roue porte une petite came n_1 en ébonite, qui est un peu plus longue que celle de l'autre station, et qui abaisse successivement les ressorts v_3 et v_2, d'où résulte un contact en c_2 puis en c_3, et par conséquent la fermeture successive de la première et de la seconde branche du circuit. La raison pour laquelle la pièce d'ébonite n_1 est un peu plus longue que son analogue de la station I, est que la fermeture proprement dite du courant se fait à cette station I, mais que, au moment où cela a lieu, le courant doit trouver le passage libre à la station II, de sorte qu'ici le contact doit déjà être établi d'avance. A l'état de repos, n_1 tient abaissé le ressort v_3; dès que le courant est fermé à la station centrale, il traverse donc l'hélice de l'électro-aimant E_1 de la station II, lequel électro-aimant met l'appareil en marche, exactement comme le fait celui de la station I. Après 5 révolutions du pendule conique, la roue de distribution, à l'une et à l'autre station, est assez avancée pour que les électro-aimants F et F_1 entrent dans le circuit. Le cylindre de la station I et le bras observateur de la station II se mettent donc à tourner au même instant, car la roue L_2, tout comme le cylindre, est retenue seulement par une came, qui ne devient libre que lorsque F_1 attire son armature. A cette station aussi, en même temps que tourne le pendule conique, s'abaisse un poids Q_1, qui toutefois, outre la fonction mentionnée précédemment, en a ici encore une autre à remplir.

Dans notre explication sommaire, il a été supposé en effet que les traits de division de l'échelle étaient travaillés en relief, que

l'aiguille se mouvait au-devant d'eux, et qu'alors le même bras observateur touchait successivement les traits de l'échelle et l'aiguille de l'instrument dont il s'agissait de recueillir l'indication. Mais en fait, pour des raisons techniques, cela n'est pas exécutable, et c'est seulement pour simplifier les idées que les choses ont été présentées de cette manière. Le bras observateur W se meut en face d'un anneau fixe V, garni de petites goupilles en platine, qui représentent les divisions de l'échelle. L'aiguille W_2 de l'instrument (dans la figure c'est l'aiguille du baromètre à balance, nous la décrirons plus loin) parcourt un second anneau V_1, pourvu d'une échelle graduée ordinaire, sur laquelle on peut effectivement lire l'indication de l'instrument. Mais, pour que la lecture soit transmise automatiquement à la station centrale, il faut d'abord que l'aiguille soit rendue momentanément immobile; à cet effet, elle est recourbée autour du bord de l'anneau V_1, de sorte qu'un troisième anneau V_2, lorsqu'il vient s'appliquer sur V_1, la serre fortement. Sur l'axe de la roue d'observation se trouve maintenant, outre le bras W dont il a déjà été question et qui tourne devant l'anneau V, un second bras semblable W_1, dont l'extrémité touche à chaque révolution l'aiguille W_2 de l'instrument. Si celle-ci n'était pas solidement retenue, le frottement du bras observateur pourrait facilement déranger l'instrument. Comme les deux bras observateurs sont fixés sur le même axe, l'effet est le même que s'il n'y en avait qu'un seul.

Ainsi qu'il a été dit, l'immobilisation de l'aiguille résulte de ce que l'anneau V_2 est pressé contre l'anneau V_1, l'extrémité recourbée de l'aiguille se trouvant entre deux. Cette pression est effectuée par le poids Q_1. L'anneau V_2 est soutenu par deux tringles x et x, qui sont poussées en avant par un système de leviers, non visibles dans la figure, sous l'action d'une pédale sur laquelle le poids Q_1 vient appuyer lors de sa descente.

Si maintenant nous récapitulons pour la station éloignée, comme nous l'avons fait pour la station centrale, ce qui s'y passe successivement à chaque observation, nous voyons que d'abord le pendule conique est rendu libre, de sorte que l'engrenage com-

mence à marcher; ensuite les aiguilles des divers instruments sont arrêtées fixement par la descente du poids Q_1; enfin les bras observateurs se mettent à l'œuvre, et tout revient au repos après que la roue d'observation a fait un tour, que le poids Q_1 a de nouveau été soulevé, que les aiguilles des instruments ont recouvré leur mobilité, et que par conséquent l'appareil a été remis en état pour l'observation suivante.

Les instruments.

L'appareil qui a été exposé à Paris est construit de manière à fournir les indications de 4 instruments, à savoir, du baromètre, de l'anémomètre, du thermomètre et de la girouette. Quant aux deux premiers, les figures III et IV en montrent la disposition. Les deux autres ne se distinguent pas bien dans nos dessins, raison pour laquelle nous ne les décrirons pas.

Les aiguilles du baromètre et de l'anénomètre se meuvent le long de l'anneau V_1, tandis que l'indication de la température et de la direction du vent exige un second système d'anneaux, qui se trouve derrière l'engrenage D et par conséquent n'est pas visible. Comme la roue L_2 ne peut toutefois faire qu'une seule révolution, parce qu'autrement une même aiguille pourrait être touchée deux fois par le bras observateur, les plus grands arcs parcourus par les aiguilles des quatre instruments ne doivent pas occuper ensemble plus de 360°. Un arc de $97\frac{1}{2}$° a été attribué au baromètre, un de 60° à l'anémomètre, de 77° au thermomètre et de 60° à la girouette; le reste de la circonférence est occupé par de petits intervalles, qui servent à séparer les échelles des divers instruments et à laisser sur le cylindre un espace vide, où les bords du papier qui l'enveloppe sont collés l'un sur l'autre.

Ainsi qu'il a été dit précédemment, les instruments dont on veut transmettre les indications doivent être des instruments à aiguille. Il est donc de la plus haute importance de savoir comment cette condition a été remplie par M. Olland, car l'exacti-

tude des observations en dépend pour une grande partie. On serait peut-être porté à croire que la nécessité de donner cette disposition particulière aux instruments doit en diminuer la précision. La description suivante montrera que cela n'est pas le cas dans notre télémétéorographe.

Le baromètre est un baromètre à balance. Il se distingue toutefois des autres instruments de ce genre en ce que ce n'est pas le tube du baromètre, mais la cuvette, qui est portée par l'un des bras de la balance, comme la figure le montre clairement. Dans cette figure, Y représente le tube barométrique fixe; la cuvette y est suspendue par les anses h à l'extrémité d'une balance I, de la manière usitée dans les bonnes balances, c'est-à-dire au moyen de couteaux; le fléau repose aussi sur un couteau, en i_1.

Deux poids q, qui peuvent glisser le long de deux tringles verticales, servent à régler la position du centre de gravité, tandis que le second bras du fléau porte un poids mobile q_1 destiné à faire équilibre à la cuvette du baromètre. Comparé à celui d'une balance ordinaire, le centre de gravité se trouve très bas; cela rend notre balance barométrique très peu sensible, comme elle doit d'ailleurs l'être en un certain sens.

De même que dans d'autres instruments, on peut aussi dans la balance distinguer deux sortes de sensibilité. Celle-ci peut consister, premièrement, en ce que le fléau s'incline visiblement sous l'action d'un très petit poids additionnel, autrement dit, en ce que le frottement est atténué autant que possible, de manière a être vaincu par le plus léger effort. Cette sensibilité dépend uniquement de la bonne construction des couteaux, et c'est là une condition à laquelle la balance décrite satisfait complètement. Une autre espèce de sensibilité, celle qu'on entend ordinairement par ce mot, consiste en ce que, pour un très petit poids additionnel, l'inclinaison du fléau est aussi grande que possible. Cela ne saurait être désirable dans le cas actuel, car il faut que l'inclinaison soit proportionnelle à l'accroissement du poids, c'est-à-dire, à la quantité de mercure qui pour une variation déter-

minée de la hauteur barométrique entre dans la cuvette ou en sort; or cette proportionnalité n'existe plus dès que les arcs parcourus acquièrent une grandeur considérable.

Pour que la balance transmette son mouvement à l'aiguille W_2 déjà mentionnée, sa languette I_1 est pourvue d'un arc de cercle denté qui agit sur le secteur I_2 auquel est fixée l'aiguille W_2. L'indication est donc amplifiée dans le rapport de la longueur de l'aiguille au rayon du secteur I_2.

Qu'arrive-t-il maintenant lorsque le niveau barométrique varie, par exemple s'abaisse? Une certaine quantité de mercure passe alors du tube dans la cuvette, la balance penche à droite, et l'aiguille W_2 tourne par conséquent à gauche, c'est-à-dire, rétrogade sur son échelle. De la même façon, quand le baromètre monte, l'aiguille avance.

Un avantage du baromètre à balance, c'est qu'il ne demande pas de correction de température. En effet, si la température croît, sans que la pression atmosphérique change, le mercure s'élèvera bien dans le tube, mais sans qu'il sorte quelque chose de la cuvette pour entrer dans le tube. La cuvette n'en deviendra ni plus lourde ni plus légère, et par conséquent l'indication ne sera pas altérée de ce chef. Toutefois, le mercure de la cuvette participera aussi à l'accroissement de température, ce qui en soi n'aurait encore absolument aucune influence sur le poids, s'il n'en résultait que le niveau monte un peu dans la cuvette et par suite doit monter de la même quantité dans le tube, de sorte que la cuvette devient un peu plus légère. Cette petite source d'erreur peut du reste être entièrement évitée, en donnant aux anses h une longueur telle que, par la dilatation de ces anses, le niveau en y s'abaisse précisément autant qu'il s'élève par la dilatation du mercure.

L'inscription de la vitesse du vent se fait d'une manière un peu différente de celle des autres éléments météorologiques. L'instrument consiste en un moulinet de Robinson. Après un certain nombre de révolutions, un engrenage ferme à la station II un courant local, qui traverse l'hélice de l'électro-aimant B

et par là fait avancer de une dent la roue à rochet C. Ce mouvement est transmis par un pignon à la roue C_1, et par suite à l'aiguille W_3 qui est montée sur le même axe. Celle-ci tourne donc toujours à droite, s'avance de plus en plus sur l'arc de V_1 qui lui est assigné, et finirait par le dépasser; pour empêcher que cela n'arrive, l'aiguille est ramenée tous les quarts d'heure au zéro de son échelle, par l'intermédiaire du bras observateur. Celui-ci tourne en sens inverse de l'aiguille de l'anémomètre, qu'il doit donc rencontrer et toucher; mais, au lieu de glisser alors sur elle, comme cela a lieu pour le baromètre, il lui fait rebrousser chemin. L'aiguille, en effet, n'est pas serrée par l'anneau mobile V_2, elle reste donc libre et de plus elle est montée sur son axe à frottement assez doux pour se laisser entraîner par le bras observateur, qui ne l'abandonne qu'au commencement de l'arc, où elle est arrêtée par un butoir. L'inscription sur le cylindre a donc lieu de la manière suivante. Tant que l'aiguille n'est pas encore touchée, l'échelle de l'instrument est reproduite comme nous l'avons expliqué à propos du baromètre, mais d'arrière en avant, c'est-à-dire, en commençant par la plus haute division. Cela continue jusqu'à ce que le bras observateur rencontre l'aiguille et qu'ainsi le contact électrique soit établi. Le style traceur reste alors abaissé sur le cylindre aussi longtemps que ce contact dure, et par conséquent jusqu'à ce que l'aiguille soit revenue au zéro de son échelle. Sur le cylindre il se forme donc une série de points, qui, à partir de la division qu'occupait l'aiguille, se transforme en une ligne pleine, continuée jusqu'à la division zéro. On voit que la lecture est tout aussi facile que pour le baromètre, et qu'en outre l'aiguille est ramenée à son point de départ, pour pouvoir reprendre sa course au bout d'un quart d'heure.

Comme nous l'avons déjà dit, les indications des autres instruments se font d'une manière analogue à celle qui a été décrite pour le baromètre. En ce qui concerne le thermomètre, nous nous bornerons à remarquer que dans notre appareil il a la disposition du thermomètre métallique de M. Krecke [1]). Toutefois,

[1]) E. H. von Baumhauer, *Sur un météorographe universel, Arch. néerl.*, t. IX, p. 253.

un instrument d'une autre construction pourrait aussi facilement être employé.

La girouette offre une disposition toute particulière; la tige verticale sur laquelle elle est fixée porte une roue conique, qui engrène aux deux côtés avec deux autres roues; sur les axes de celles-ci sont centrés des disques métalliques, dans le bord extérieur desquels sont incrustées de petites pièces d'ébonite. Un ressort, qui presse sur ce bord extérieur, repose donc alternativement sur le métal et sur l'ébonite, de sorte que les disques forment deux interrupteurs de courant. Grâce à un encliquetage spécial, ces deux interrupteurs ne peuvent jamais tourner en même temps; l'un est seulement entraîné quand la girouette tourne dans un sens, l'autre quand elle tourne dans le sens contraire. Une petite pile locale est reliée à ces commutateurs, de telle façon qu'elle engendre des courants de direction opposée suivant que c'est le premier commutateur qui fonctionne ou bien le second; ces courants parcourent les spires de deux électro-aimants, dont chacun agit sur une roue à rochet, qui fait tourner une aiguille tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé; les indications de cette aiguille sont ensuite transmises à la station centrale, tout comme cela a lieu pour les indications du baromètre. La direction du vent est notée pour 16 aires différentes. M. Olland a imaginé une disposition très ingénieuse pour qu'il ne se fasse pas de nouveau contact tant que le vent ne s'est pas déplacé d'une aire entière, et pour que, en cas de rétrogradation du vent, le changement ne s'indique pas non plus avant que le vent ne soit revenu d'un rumb entier sur lui-même; de cette manière, l'aiguille doit toujours conserver sur l'échelle de l'instrument une position qui s'accorde avec celle de la girouette elle-même.

Cette indication du vent au moyen d'une petite pile locale et d'un circuit local a l'avantage de rendre l'emplacement de la girouette indépendant de la place que tout le reste de l'appareil occupe dans le bâtiment où il est installé. Pour ceux qui condamnent la transmission galvanique partout où elle est évitable

il va sans dire que l'indication de la direction du vent (de même que celle de la vitesse du vent) pourra aisément se faire par des moyens purement mécaniques; mais alors l'emplacement de l'instrument devra se régler d'après la place où l'on voudra poser la girouette.

Quelques remarques au sujet de la manœuvre et de l'emploi de l'appareil peuvent encore avoir leur utilité. De même que pour tout autre instrument un peu compliqué, il y a eu pour le télémétéorographe de grandes difficultés à vaincre, surtout au début. La plus grave consistait en ceci: lorsque, par suite d'un contact imparfait ou de l'emploi d'un courant trop faible, les électro-aimants qui devaient déclencher les diverses parties du mécanisme refusaient leur service, l'appareil de la station éloignée ne revenait plus à son état primitif. Cela peut arriver, entre autres, de la manière suivante. Si, par exemple, l'électro-aimant F_1 de la station II refuse d'attirer son armature, la roue d'observation L_2 n'entre pas en rotation, l'axe vertical l éprouve alors durant toute la marche de l'appareil la résistance du frottement avec lequel il engrène dans le pignon qui devait transmettre son mouvement à la roue d'observation. Le pendule conique n'acquiert donc pas une vitesse suffisante pour pouvoir soulever le poids Q_1. Il en résulte que l'engrenage s'arrête avant que le bouton d'ébonite n_1 de la roue de distribution (voir la figure schématique) ne presse le ressort v_3. Au moment de l'observation suivante, le contact sera donc bien établi à la station I par l'horloge régulatrice, mais le courant ne pourra pas circuler, parce que le circuit est interrompu à la station II. Pour obvier à cette grave difficulté, l'appareil a été plus tard disposé de manière que, si le bras observateur n'est pas mis en liberté par le courant, son déclenchement est opéré un instant après par l'engrenage lui-même. L'appareil peut alors marcher régulièrement et ne s'arrête plus avant que la roue de distribution n'ait atteint la position où le courant peut de nouveau librement passer. Le seul inconvénient qui subsiste est donc que le bras observateur

commence à se mouvoir un instant après le cylindre de la station I; l'inscription ne se fait donc pas au point précis sur le cylindre, mais cela est sans importance pour l'exactitude de l'observation.

A la page 184 il a déjà été noté que l'un des grands avantages de l'appareil d'Olland consiste en ce que, à chaque observation, l'échelle entière de l'instrument est inscrite en même temps que la position de l'aiguille. Cet avantage devient maintenant évident. De même que par la cause ci-dessus assignée, le cylindre et le bras observateur pourraient aussi être dérangés relativement l'un à l'autre par quelque autre circonstance, ce qui aurait pour conséquence que l'inscription se ferait en un autre point du cylindre; mais, l'échelle entière étant inscrite, celle-ci subira le même déplacement, et par conséquent la distance de l'aiguille au point zéro ne sera pas changée. Un simple décompte permettra donc d'utiliser une observation qui, sans cela, eût été entièrement perdue.

La manœuvre de l'appareil ne présente pas la moindre difficulté. Le cylindre est d'une dimension telle qu'il peut suffire pendant un peu plus de trois jours à l'inscription des observations répétées de quart d'heure en quart d'heure. Deux fois par semaine le cylindre doit être remis en état. Pour cela, une bande de papier glacé, coupée à la grandeur convenable, est enroulée sur le cylindre, qui se laisse facilement enlever de son support S. Les bords du papier sont tendus aussi fortement que possible, et finalement collés l'un sur l'autre. Le cylindre est ensuite fixé à un petit appareil au moyen duquel il peut recevoir aisément un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal. En tenant alors sous lui la flamme fuligineuse d'un lampe à pétrole, on peut recouvrir le papier d'une couche très uniforme de noir de fumée. Cette opération terminée, le cylindre est prêt à prendre sa place dans l'appareil. Lorsque, au bout de 3 jours, le papier est entièrement chargé d'inscriptions, on enlève le cylindre, on coupe le papier suivant une des génératrices du cylindre (lequel, à cet effet, est creusé d'un sillon) et on le détache avec précaution. Pour fixer le noir de fumée et assurer ainsi la conser-

vation du dessin, le papier est simplement passé dans une solution alcoolique de gomme-laque et ensuite séché à une douce chaleur (au soleil en été, près d'un poêle en hiver). Si l'on voulait pouvoir tirer des épreuves des indications de l'appareil, rien ne serait plus facile que d'entourer le cylindre, au lieu d'un papier, d'une feuille de cuivre, ainsi que le fait M. van Rysselberghe. Ces feuilles sont couvertes d'un vernis gras, que le style traceur enlève; en les soumettant, après quelles ont été détachées du cylindre, pendant quelque temps à l'action d'un acide, on détermine l'attaque des parties qui sont été mises à nu, et on obtient de cette manière des planches de cuivre aptes à donner un grand nombre d'épreuves.

Une disposition différente de celle qui a été décrite serait peut-être encore préférable. On peut concevoir, en effet, que, tout comme dans le météorographe de M. Theorell, une bande de papier sans fin soit lentement attirée vers le haut par une horloge, et que, chaque quart d'heure, l'électro-aimant à style traceur se promène horizontalement sur cette bande. Le style serait chargé d'une encre ne séchant pas trop vite. On obtiendrait ainsi sur papier ordinaire des séries régulières des différentes inscriptions, et, sans avoir besoin d'appliquer à courts intervalles un nouveau papier, on aurait constamment un aperçu net des derniers changements survenus dans l'état de l'atmosphère. L'expérience devra toutefois décider si une pareille disposition ne rencontrerait pas de trop grandes difficultés.

Quoi qu'il en soit, dans sa constitution présente l'appareil a déjà une valeur inappréciable. Jusqu'ici, l'Institut météorologique d'Utrecht ne reçoit que deux fois par jour des avis télégraphiques concernant le temps aux stations le Helder, Groningue-Delfzijl, Maestricht et Flessingue. De ces renseignements, on déduit s'il y a danger d'une tempête prochaine. Mais, dans l'intervalle qui sépare les deux dépêches reçues, de grands changements atmosphériques peuvent être survenus et s'être de nouveau effacés, changements dont l'Institut n'aura par conséquent aucune connaissance. Effectivement, il est une fois arrivé que sur les côtes des Pays-Bas

a soufflé une tempête au sujet de laquelle Utrecht n'avait pu donner l'éveil, parce que la différence barométrique qui devait l'annoncer était survenue précisemént entre les signaux du matin et ceux du soir. Des observations recueillies plus tard, et provenant d'instruments enregistreurs automatiques, ont mis ce fait au jour.

Du reste, même en ne tenant pas compte de ce cas peut-être exceptionnel, il est clair que la prédiction du temps n'acquerra toute sa valeur que lorsqu'on ne sera pas borné à connaître à des instants fixes l'état atmosphérique des lieux environnants, mais qu'on pourra suivre aussi ses incessantes variations. Or, ce but, le télémétéorographe d'Olland nous met pleinement en état de l'atteindre.

LÉGENDE EXPLICATIVE DE LA PLANCHE VI.

Les figures I, II, III et IV représentent l'appareil entier: les deux premières montrent, en élévation et en plan, la partie enregistrante, ou le *récepteur*, qui occupe la station I ou station centrale; les deux autres font voir, de la même manière, la partie qui occupe la station II ou station éloignée, où se trouvent les instruments à observer et les organes nécessaires pour transmettre leurs indications, c'est-à-dire le *transmetteur*. Les figures V et VI donnent un aperçu de la distribution du courant dans les deux parties de l'appareil, dont le concours ressort ainsi nettement. La figure VII, enfin, montre le détail de la roue de distribution de la station II.

Les lettres ont la signification suivante:

dans les fig. I et II (station I):

A A A. Cadre en fonte, sur lequel repose l'appareil entier.

B B. horloge, qui tous les quarts d'heure met l'appareil en marche.

C. disque de laiton, présentant 4 encoches, dans lesquelles tombe l'extrémité a_1 du levier $a\,a_1\,a_2$.

$b\,b_1\,b_2$. ressort de contact, qui est abaissé par $a\,a_1\,a_2$.

D D. engrenage.

E E. électro-aimant, avec l'armature e, le crochet e_1, qui retient la la came g, et le bras e_2, dont le doigt e_4 pénètre dans une encoche de la roue de distribution H.

$l\,l$. axe vertical,

l_1. pignon fixé sur cet axe.

f. bras retenu par frottement sur ce même axe.

Q. pendule conique,

Q_1. poids auxiliaire, destiné à communiquer promptement à l'appareil la vitesse nécessaire.

K K. levier à double plan incliné.

T. bras sur lequel K K agit.

L_2. grande roue horizontale, qui peut tourner sous l'action d'un pignon fixé à frottement sur *l l*.

S_1. axe sur lequel tourne L_2.

S. porte-cylindre, fixé sur S_1.

F F. électro-aimant, avec armature h_2 et bras h_1.

h. came portée par L_2 et venant buter contre h_1.

H. roue de distribution.

$d\,d_1$. ressort de contact, pour faire passer le courant par les spires de G.

d_3. vis de contact.

G. électro-aimant du style traceur.

G_1 G_1. armature et style.

G_2 G_3. montants, le long desquels G peut s'élever et s'abaisser.

P. vis qui produit ce mouvement.

Z Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 engrenage au moyen duquel l'horloge B fait tourner la vis P.

dans les fig. III et IV (station II).

A A A. cadre en fonte, semblable à celui des fig. I et II.

D D. engrenage, semblable à celui des fig. I et II.

l. axe vertical.

l_1. pignon.

L_2 L_2. roue d'observation.

W. bras observateur pour les divisions des échelles.

Q. pendule conique.

E_1. électro-aimant, semblable à E de la station I.

F_1. électro-aimant qui déclenche L_2, dès que le courant le traverse.

Q_1. poids, semblable à Q_1 de la station I.

V. anneau fixe portant des goupilles qui représentent les divisions des échelles.

V_1. anneau fixe le long duquel se mouvent les aiguilles des instruments.

V_2. anneau qui arrête momentanément les aiguilles.

x x. tringles qui supportent cet anneau.

W_1. bras observateur pour les aiguilles des instruments.

W_2. aiguille du baromètre.
W_3. aiguille de l'anémomètre.
Y. tube du baromètre.
y. cuvette.
h. anses par lesquelles *y* est suspendue.
I. fléau de la balance du baromètre.
i_1. couteau de cette balance.
q q. poids glissants qui servent à régler la position du centre de gravité.
q_1. poids-curseur servant à faire équilibre à la cuvette du baromètre.
I_1. languette de la balance, avec arc de cercle denté.
I_2. secteur de cercle denté, fixé sur l'axe de W_2.
B B. électro-aimant pour l'inscription de la vitesse du vent.
C. roue à rochet, sur laquelle agit l'armature de B.
C_1. roue par laquelle ce mouvement est transmis à W_3.

dans les fig. V et VI (dessin schématique, représentant à gauche la station I, à droite la station II):

k k_1. vis de serrage où aboutissent les trois branches du circuit galvanique à la station I.
k_2 k_3. vis de serrage semblables pour la station II.
k_1 k_2. fil télégraphique reliant les deux stations.
E et E_1. électro-aimants qui déclenchent les deux engrenages, dès que leurs spires sont traversées par un courant.
C. roue à encoches, fixée sur l'axe de l'aiguille des minutes de l'horloge.
a a_1 a_2. levier avec vis de pression a_3.
b b_1 b_2. ressort de contact, par lequel le courant est dirigé à travers E.
c_2 c_2. fermeture de courant pour l'électro-aimant E_1.
H et H_1. les deux roues de distribution.
n et n_1. boutons qui abaissent les ressorts de contact.
F et F_1. électro-aimants qui déclenchent le cylindre et la roue d'observation.
v_2 *c c* et v_2 c_3 c_3. fermetures de courant pour ces électro-aimants.
G. électro-aimant du style traceur.
V W W_2. anneau fixe portant les divisions scalaires, bras observateur et aiguille du baromètre.
d d_1 d_3. fermeture de courant pour G.

dans la fig. VII.

H_1. roue de distribution de la station II.

n_1. bouton placé à la circonférence de cette roue, qui abaisse les ressorts de contact.

$v_3\, c_2\, c_2$. fermeture de courant pour l'électro-aimant E_1 qui déclenche l'engrenage.

$v_2\, c_3\, c_3$. fermeture de courant pour l'électro-aimant F_1 qui déclenche la roue d'observation L_2.

Fig. 1.

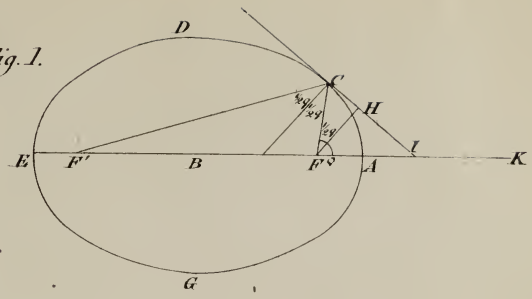
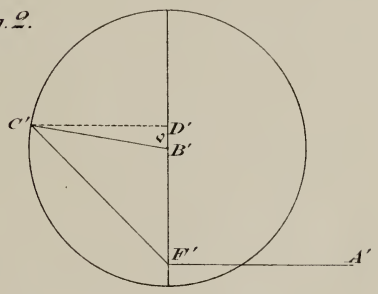


Fig. 2.



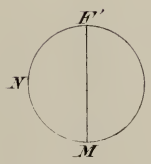
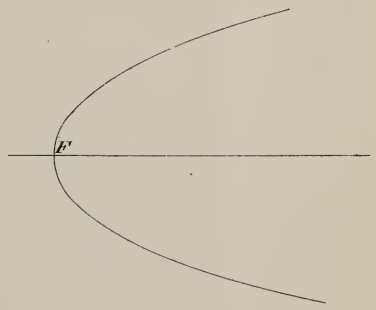


Fig. 3.



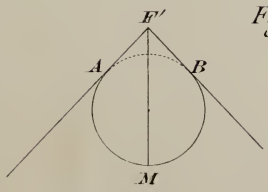
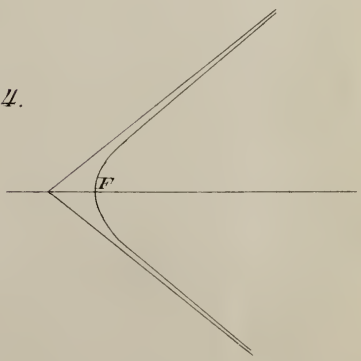


Fig. 4.



Lith. Emrik & Binger.

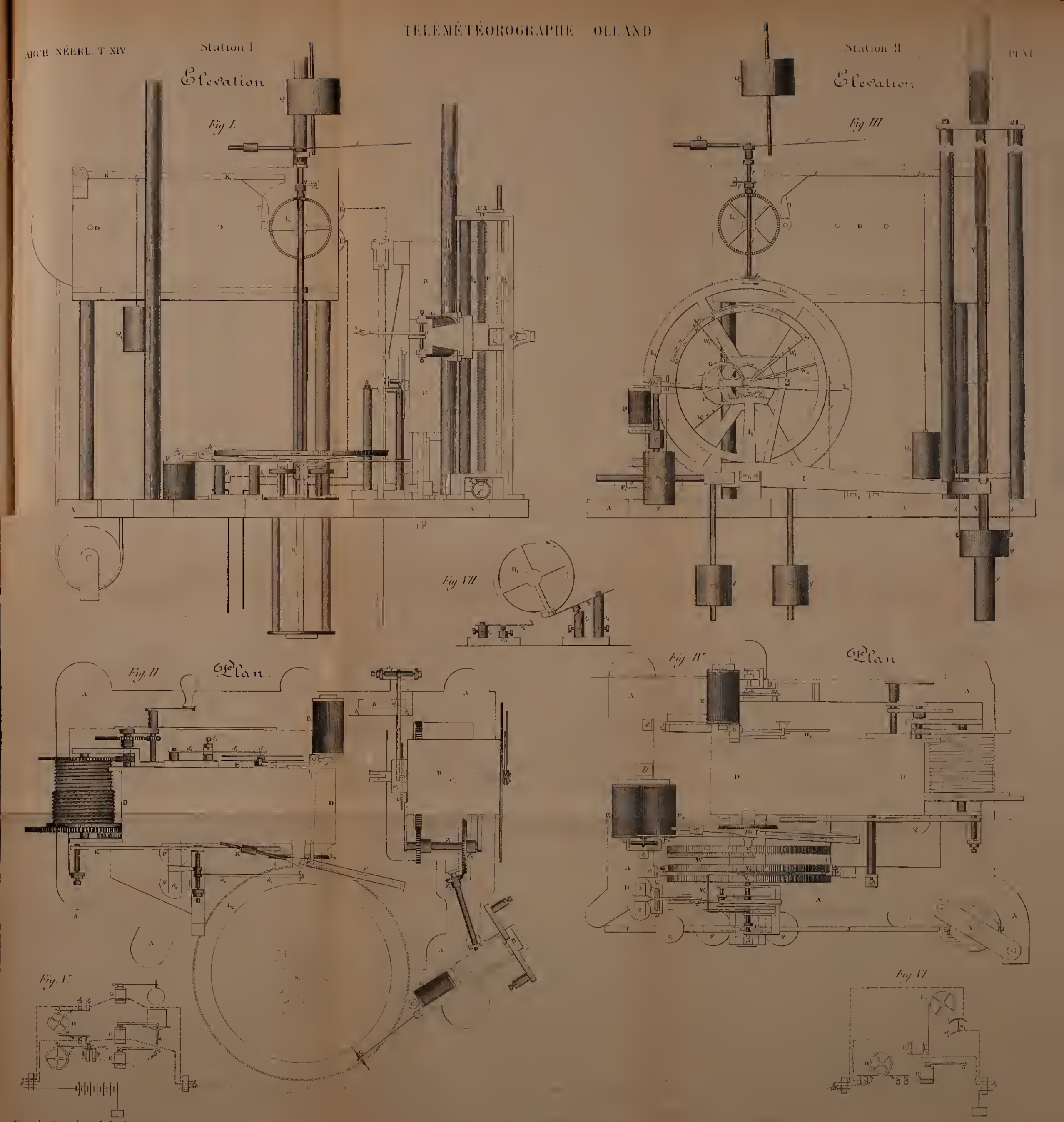


Figure schématique indiquant la distribution du courant galvanique et les organes principaux de l'appareil à la Station I.

Lith. Emrik & Binyer

Figure schématique indiquant la distribution du courant galvanique et les organes principaux de l'appareil à la Station II

TOME XIV. 3me et 4me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et S. C. Snellen van Vollenhoven.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1879.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

RÉVISION
DES
CHAMPIGNONS
TROUVÉS JUSQU'À CE JOUR DANS LES PAYS-BAS.

PAR

C. A. J. A. OUDEMANS.

I. HYMÉNOMYCÈTES.

I. AGARICINI.

I. AGARICUS.

Series I. Leucospori.

I. Amanita.

A. Annulo manifesto, supero.

* Volva apice dehiscente vel circumscissa, limbo libero persistente.

1. *A. phalloides* Fr. (Ep. 18; Prodr. 303; H. 9; Fl. Bat. t. 829). Bois et dunes. — Juill. à Oct. — Bloemendaal, Naarden. — Leiden, Naaldwijk. — Baarn, Driebergen. — Heeze, Neerbosch, Ubbergen. — Walcheren.

2. *A. Mappa* Batsch. (Ep. 19; Prodr. 304; H. 9). Bois sablonneux. — Juill. à Oct. — Haarlem. — Westland. — Rijzenburg, Ubbergen, Nijmegen.

** Volva definite circumscissa, basi marginata persistente, calyptra in verrucas crassas pilei partita.

3. *A. muscarius* L. (Ep. 20; Prodr. 304; H. 9; Fl. Bat. t. 495). Lieux sablonneux ombragés. — Sept. et Oct. — Noordwijk, Naarden, Haarlem. — Naaldwijk, Warmond, Leiden, Lisse. — Doorn, Driebergen, Rijzenburg, Zeist, Barneveld. — Deventer. — Nijmegen. — Walcheren, Hulst.

4. *A. pantherinus* DC. (Ep. 21; H. 9). Lieux sablonneux ombragés. — Sept. et Oct. [A°. 1861, Hartsen]. — Naarden. — Baarn, Rijzenburg, de Bilt. — Brummen.

5. *A. strobiliformis* Vitt. (Ep. 21; O. I, 18). Sept. [A°. 1862, Hartsen]. — Utrecht.

*** Volva tota friabili, in squamulas verrucasque obliterata.

6. *A. rubescens* Fr. (Ep. 23; Prodr. 304; H. 9; Fl. Bat. t. 765). Très commun dans les bois de pins et ailleurs. — Juill. à Oct. — Naarden, Haarlem. — Leiden, Naaldwijk. — Rijzenburg, Driebergen, Baarn, Doorn. — Zuid-Beveland.

7. *A. spissus* Currey. (Ep. 23; H. 9). Dans les bois. — [A°. 1862, Guye]. — Baarn.

**** Volva prorsus obsoleta, flocculosa, tota evanescente.

8. *A. lenticularis* Lasch. (Ep. 26; O. II, 2; Fl. Bat. t. 1100). Bois de hêtres. [A°. 1869, van Eeden]. — Oct. — Campagne d'Elswoud près Overveen.

B. Annulo obliterato vel nullo.

9. *A. vaginatus* Bull. (Ep. 27; Prodr. 305; Fl. Bat. 784). Bois de hêtres et de chênes. — Juill. à Oct. — Naarden, Bentveld. — Leiden, Naaldwijk. — Driebergen, Baarn. — Zuid-Beveland.

10. *A. strangulatus* Fr. (Ep. 27 O. I, 18). Dans les bois. [Sept. A°. 1863, Hartsen]. — Utrecht.

II. Lepiota.

A. Epidermide sicca.

* Proceri, annulo proprio, mobili, a volva discreto.

11. *A. procerus* Scop. (Ep. 29; Prodr. 305; H. 9; Fl. Bat. t. 725). Lieux sablonneux herbeux, et autres. — Juill. à Oct. — Naarden, Noordwijk, Callantsoog, Petten, Texel, Haarlem. — Leiden, Naaldwijk, Monster, Loosduinen, la Haye. — Rijzenburg, Zeist, Maarsbergen, Driebergen, Baarn. — Zuid-Beveland.

12. *A. rachodes* Vitt. (Ep. 29; O. I, 18 et II, 2). Sur la terre de jardin, grasse et ombragée. [Sept. A°. 1862, Hartsen]. — Vondelspark à Amsterdam. — Bien de campagne Voorlinden près Wassenaar.

13. *A. molybdites* Meyer (Ep. 30; O. I, 18). Serres chaudes. [Oct. A°. 1862, Hartsen]. — Utrecht.

14. *A. excoriatus* Schaeff. (Ep. 30; Prodr. 305; Fl. Bat. t. 725). Champs et lieux cultivés. — Août à Oct. — Naaldwijk. — Utrecht. — Uilenpas près Doesburg. — Zuid-Beveland.

15. *A. mastoideus* Fr. (Ep. 30; O. I, 18). Taillis de chênes. [Juill. A°. 1864, Oudemans]. — Naarden.

* * Clypeolarii, annulo proprio, fixo, cum velo universali stipitem vestiente homogeneo.

16. *A. Friesii* Lasch. (Ep. 31; Prodr. 305; Fl. Bat. t. 1055). Sur la terre fertile des jardins. — Sept. — Leiden (dans un jardin de la ville); Rotterdam (Nieuwe plantage et bien de campagne „Rozenburg" de M. Madry).

17. *A. acutesquamosus* WEINM. (Ep. 31; H. 9). Sur la terre fertile des jardins. [Oct. 1862, HARTSEN et OUDEMANS]. -- Amsterdam (jard. bot.). — Utrecht.

18. *A. clypeolarius* BULL. (Ep. 32; Prodr. 306). Dunes, serres chaudes. — Oct. — Amsterdam (jard. bot.), Overveen, Bloemendaal. — Utrecht.

19. *A. cristatus* A. S. (Ep. 32; Prodr. 306). Lieux herbeux. — Août à Sept. — Amsterdam, Overveen, Bloemendaal. — Leiden. — Driebergen.

* * * Annulosi, annulo supero, fixo, subpersistente, velo universali pileo adnato.

20. *A. naucinus* FR. (Ep. 34; Prodr. 306). Lieux herbeux, découverts ou ombragés. — Oct. -- Zuid-Beveland.

21. *A. cepaestipes* SOW. (Ep. 35; O. I, 19; Prodr. 306). Serres chaudes, en été.
α. *cretaceus* BULL. — Amsterdam. — Leiden.
β. *luteus* BOLT. — Amsterdam. — Leiden.

* * * * Granulosi, velo universali pilei et stipitis primitus contiguo, quo rupto formatur annulus inferus.

22. *A. cinnabarinus* FR. (Ep. 36). Sous les sapins. [17 Oct. 1878, OUDEMANS]. — Baarn.

23. *A. granulosus* BATSCH. *b. ferrugineus.* (Ep. 36; Ned. Kr. Arch. V, 331; O. II, 3). Bois à essences mêlées. [Oct. 1861, SPRÉE]. — Bien de campagne „de Boekhorst" près Lochem.

24. *A. amianthinus* SCOP. (Ep. 37; Prodr. 306; H. 9). Pâturages découverts et dunes. — Juill. à Sept. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Leiden, Naaldwijk. — Rijzenburg, Baarn.

25. *A. polystictus* BERK. (Ep. 37; O. II, 3; Ned. Kruidk. Arch. Sér. II, I, p. 312). Dans l'herbe au bord des chemins sablonneux. [Nov. A°. 1872, OUDEMANS]. — Eemnes.

* * * * * Mesomorphi, minores, graciles, stipite fistuloso, pileo sicco, cuticula integra.

26. *A. seminudus* LASCH. (Ep. 38; Prodr. 307). Bois, dans l'herbe et la mousse. — Août. — Haarlem.

B. Pilei cuticula viscosa, contigua.

III. Armillaria.

* Tricholomata subannulata, lamellis sinuato-adnexis, stipite carnoso similari.

27. *A. robustus* A. S. (Ep. 41; O. I, 19). Dans les bois. — [Oct. A°. 1863, SIX.]. — Driebergen.

28. *A. luteovirens* A. S. (Ep. 41; O. I, 19]. Bois de pins. [Oct. A°. 1862; SIX et HARTSEN]. — Driebergen.

* * Clitocybae annulatae, lamellis postice attenuatis, plus minus sine sinu decurrentibus, stipite solido.

29. *A. melleus* FL. DAN. (Ep. 44; Prodr. 308; H. 9; Fl. Bat. t. 775). Jardins, bois, etc., le plus souvent au pied des arbres. — Juill. à Août. — Amsterdam, Velzen, Bloemendaal, Heemstede, Haarlem. — Westland, Leiden. — Rijzenburg, Doorn. — Ubbergen. — Goes.

* * * Collybiae annulatae, lamellis postice aequalibus, stipite extus cartilagineo.

30. *A. laqueatus* Fr. (Ep. 47; Prodr. 308). Bois, parmi l'herbe. — Bien de campagne Groenendaal à Heemstede. — Leiden. —

31. *A. mucidus* SCHRAD. (Ep. 47; Prodr. 308). Forme des touffes sur le tronc des hêtres. — Août à Oct. — Haarlem, Overveen, Bloemendaal. — Leiden, la Haye.

IV. Tricholoma.

Ser. A. Pileus visco, fibrillis, squamis pubeve tectus nec aquose-udus vel laevigatus. Caro humorem haud absorbens nec hygrophana. Stipes velumque universale adnatum fibrillosa.

†. Limacina. Pilei pellicula humida viscosa, innato-fibrillosa vel squamulosa, sed non lacerata.

* Lamellis haud decoloribus nec demum rufescentibus.

32. *A. equestris* L. (Ep. 48; Prodr. 309; Fl. Bat. t. 1134). Bois de pins. — Juill. à Oct. — Bloemendaal, Haarlem. — Baarn.

33. *A. portentosus* FR. (Ep. 48; Ned. Kr. Arch. V, p. 331; O. II, 3). — Bois à aiguilles [SPRÉE]. — Baarn. — Lochem.

* * Lamellis decolorantibus, vulgo rubro-maculatis.

34. *A. fulvellus* (FR. (Ep. 50; O. I, 20). Bois à aiguilles. [Sept. A°. 1864, SIX]. — Driebergen.

35. *A. albobrunneus* Fr. (Ep. 51; O. I, 21). Bois à aiguilles. [Sept. A°. 1864, SIX]. — Driebergen.

36. *A. ustalis* FR. (Ep. 51; O. I, 21). Bois à aiguilles. [Oct. A°. 1863, SIX]. — Driebergen, Baarn.

37. *A. pessundatus* Fr. (Ep. 51). Dans l'herbe sous des sapins. — [17 Oct. 1878, OUDEMANS]. — Baarn.

38. *A. Russula* SCHAEFF. (Ep. 52; Ned. Kr. Arch. V, p. 331; O. II, 3). Bois à aiguilles. [Oct. A°. 1861. SPRÉE]. — Bien de campagne „de Boekhorst" près Lochem.

††. Genuina, Pilei pellicula numquam viscosa, sed in floccos subsquamosos fibrillasve lacerata.

* Lamellis immutatis nec rufo- vel nigro-maculatis.

39. *A. rutilans* SCHAEFF. (Ep. 53, Prodr. 309; H. 9; Fl. Bat. t. 1039). Bois feuillés sablonneux. — Août à Oct. — Velzen, Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Leiden. — Driebergen, Rijzenburg. — Nijmegen.

40. *A. variegatus* SCOP. (Ep. 53; Prodr. 309). Comme le précédent. — Westland.

41. *A. psammopus* KALCHBR. Bois mêlés. [31 Oct. 1878, OUDEMANS]. — Baarn.

42. *A. Columbetta* FR. (Ep. 55; Prodr. 309). Endroits ombragés des dunes et des terrains sablonneux, bois, etc.; solitaire. — Sept. à Oct. — Haarlem. — Baarn.

* * Lamellis rufescentibus vel cinerascentibus, acie vulgo demum rufo- aut nigro-maculatis.

43. *A. imbricatus* FR. (Ep. 56; Prodr. 309). Bois de pins; disséminé et en groupes. — Sept. à Oct. — Haarlem, Overveen. — Westland.

44. *A. vaccinus* P. (Ep. 56; Fl. Bat. t. 1130). Bois à aiguilles. [Oct. A°. 1872, F. W. VAN EEDEN]. — Bloemendaal (Biens de campagne Lindenheuvel et Duinendaal).

45. *A. terreus* SCHAEFF. (Ep. 57, Prodr. 309). Dunes et terrains sablonneux, aux endroits ombragés, fréquemment sous des pins. — Juill. à Oct. — Bloemendaal, Overveen, Naarden. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

46. *A. argyraceus* BULL. (Ep. 58; Prodr. 310; O. I; 21). Lieux herbeux et moussus; en touffes. — Juill. à Oct. — Haarlem, Velzen, Overveen. — Zuid-Beveland.

††† Rigida. Pilei pellicula rigida, punctato-granulata vel siccitate in squamulas glabras diffracta.

* Lamellis albis aut pallescentibus, nec rufescentibus cinerascentibusve, maculatis.

47. *A. saponaceus* Fr. (Ep. 59; Prodr. 310; Fl. Bat. t. 1120). Bois et endroits ombragés des dunes et des terrains sablonneux; disséminé ou en groupes. — Août à Oct. — Overveen, Velzen. — Leiden. — Driebergen, Soestdijk, Baarn.

48. *A. atrocinereus* P. (Ep. 60; Prodr. 310). Pâturages, lieux herbeux ombragés; en groupes. — Haarlem.

** Lamellis decolorantibus, rufescentibus vel cinerascentibus maculatisve.

49. *A. sudus* Fr. (Ep. 61; Prodr. 310). Lieux sablonneux, dans l'herbe, au pied des arbres. — Juill. à Sept. — Haarlem. — Zuid-Beveland.

†††† Sericella. Pileo primitus sericello, mox glabrato, siccissimo.

* Lamellis latis, crassiusculis, subdistantibus. Graveolentes.

50. *A. sulphureus* Bull. (Ep. 63; Prodr. 311; Fl. Bat. t. 1070). Bois sablonneux, entre les feuilles pourrissantes; en groupes. — Août à Sept.; aussi en Mai. — Overveen, Bloemendaal, Santpoort. — Westland. — Driebergen.

** Lamellis tenuibus, confertis, angustis.

51. *A. ionides* Bull. (Ep. 65; Ned. Kr. Arch. 2e Sér., I, p. 438). Sous les pins. — Overveen. [Biens de campagne Vaart en Duin et Belvédère; F. W. van Eeden].

Ser. B. Pileus laevis, glaber, jove pluvio udus. Caro mollis, aquosa et hygrophana.

††††† Guttata. Pileo carnoso, molli, fragili, guttato-maculato, rivulosove, stipite solido.

* Lamellis albidis.

** Lamellis decolorantibus, rufescentibus vel fuligineis.

52. *A. graveolens* P. (Ep. 67; Ned. Kruidk. Arch. 2e Série, I, p. 438). Lieux herbeux. [Mai 1871. F. W. van Eeden]. Velzerbosch, Schoten (Klooster).

53. *A. pes caprae* Fr. (Ep. 68). Bordures de gazon ombragées par des houx. [14 Oct. 1878, Oudemans]. — Amsterdam [Jard. zoologique].

†††††† Spongiosa. Pileo e compacto spongioso, obtuso, laevi, glabro, udo nec hygrophano.

* Lamellis haud decolorantibus.

54. *A. patulus* Fr. (Ep. 69; Prodr. 311). Endroits herbeux et moussus des bois; potagers, jardins; solitaire et en groupes. — Août à Sept. — Leiden.

55. *A. arcuatus* Bull. (Ep. 70; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 438). Dans les bois, solitaire. [Oct. 1871; F. W. van Eeden]. — Velsen (Duinenberg) et Heemstede (Meerenberg).

56. *A. albus* Schaeff. Ep. 70; Prodr. 311). Lieux sablonneux et argileux ombragés, sous les haies, dans les bois; solitaire et en groupes. — Mai à Oct. — Vogelenzang, Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

57 *A. leucocephalus* Fr. (Ep. 71; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 438). Dans les bois. [Oct. 1871; F. W. van Eeden]. Bloemendaal.

** Lamellis decolorantibus.

58. *A. personatus* Fr. (Ep. 72; Prodr. 311). Lieux sablonneux, découverts et ombragés; en groupes. — Sept. à Oct. — Westland. — Baarn.

59. *A. nudus* Bull. (Ep. 72; Prodr. 311). Bois de pins, jardins. — Oct. — Velsen, Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Westland.

60. *A. cinerascens* Bull. (Ep. 73; Ned. Kr. Arch., 2e Série, I, 438). Sous les sapins. [Oct. 1868; F. W. van Eeden]. — Heerenduin près Haarlem. — Baarn.

††††††† Hygrophana. Pileo tenui, subumbonato, udo carneque demum molli hygrophanis.

* Lamellis albidis immaculatis.

61. *A. grammopodius* Bull. (Ep. 74; Prodr. 312). Terrains sablonneux et argileux: bords des chemins, pâturages, lieux herbeux ombragés; solitaire et en groupes. — Sept. à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

62. *A. melaleucus* P. (Ep. 74; O. I, 21). Taillis de chênes, après de fortes pluies. [Juill. 1864, Oudemans]. — Amsterdam, Overveen, Bloemendaal, Naarden. — Doorn.

63. *A. brevipes* Bull. (Ep. 75; Prodr. 312; Fl. Bat. t. 1095). Bords des chemins et des fossés, jardins et potagers, sur les sols sablonneux et argileux, en groupes et en touffes. — Sept. à Nov. — Amsterdam, Overveen. — Leiden. — Goes.

64. *A. humilis* Fr. (Ep. 75; Prodr. 312). Lieux herbeux, pâturages, etc., à sol sablonneux ou argileux; en touffes. — Sept. à Oct. — Amsterdam. — Leiden. — Zuid-Beveland.

65. *A. subpulverulentus* P. (Ep. 76; Ned. Kr. Arch., 2e Série, II, 35). Dans l'herbe, à l'ombre des grands arbres. [Sept. 1873, Oudemans]. Près d'Utrecht, en allant vers „den Hommel".

** Lamellis violascentibus, griseis, fuligineis.

V. Clitocybe.

Ser. A. Pileus carnosus, immutabilis expallensve, sed non hygrophanus. Caro firma, non aquosa, nec in laminas scissilis.

†. Disciformes. Pileo e convexo plano depressove, regulari, obtuso; lamellis primitus adnatis vel regulariter adnato-decurrentibus.

* Pileo cinereo fuscove.

66. *A. nebularis* Batsch. (Ep. 79; Prodr. 313; H. 9; Fl. Bat. t. 1160). Terrains sablonneux, aux endroits herbeux ombragés et dans les bois; en groupes. — Août à Sept. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Leiden. — Rijzenburg. — Baarn.

67. *A. clavipes* P. (Ep. 79; Prodr. 313). Bois de pins et autres lieux sablonneux ombragés. — Juill. à Oct. — Leiden. — Baarn.

** Pileo violaceo, rufescente.

68. *A. tyrianthinus* Fr. (Ep. 82; O. I, 21). Bois de pins. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

*** Pileo lutescente.

**** Pileo viridi, pallescente.

69. *A. odorus* Bull. (Ep. 85; Prodr. 313; H. 9). Sapinières, endroits ombragés des bruyères et autres lieux sablonneux; en groupes ou formant des touffes. — Août à Oct. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede, Velsen. — Baarn, Utrecht. — Keppel, Enghuizen.

* * * * * Colore albo, candicante.

70. *A. cerussatus* Fr. (Ep. 86; Prodr. 313). Bois et lieux ombragés sablonneux. — Août à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

71. *A. phyllophilus* Fr. (Ep. 87; Prod. 314). Entre les feuilles pourrissantes dans les bois de hêtres, ainsi que dans d'autres lieux ombragés et aux endroits découvertes des dunes. — Sept. à Oct. — Bloemendaal. — Leiden. — Driebergen.

72. *A. candicans* P. (Ep. 88; Prodr. 314). Entre les feuilles pourrissantes sous les arbres feuillés, quelquefois sous les arbres à aiguilles; en groupes. — Août à Oct. — Leiden.

73. *A. dealbatus* Sow. (Ep. 88; H. 9). Terrains sablonneux, dans l'herbe. — Août à Oct. — Rijzenburg, Driebergen.

††. Difformes. Pileo primitus umbonato, dein irregulari. Lamellis inaequaliter decurrentibus. Caespitosi, saepe connati, forma valde varii, interdum vero solitarii.

74. *A. opacus* With. (Ep. 93; Prodr. 314). Lieux herbeux ombragés, bois, etc.; solitaire et en groupes. — Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

††† Infundibuliformes. Pileo a disco carnoso versus margines attenuato, demum toto infundibuliformi aut centro profunde umbilicato-depresso. Lamellis primitus longe et aequaliter decurrentibus.

* Pileo colorato pallescenteve, superficie innato-flocculosa vel sericea, bibula.

75. *A. maximus* Fl. Wett. (Ep. 93; Prodr. 314). Endroits très ombragés des bois, entre les feuilles tombées; solitaire et en groupes. — Août à Sept. — Westland.

76. *A. infundibuliformis* Schaeff. (Ep. 93; Prodr. 314). Dans les bois parmi la mousse, et dans les lieux humides ombragés; en groupes. — Août à Sept. — Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Rijzenburg.

** Pileo colorato pallidove, glabro, udo.

77. *A. gilvus* P. (Ep. 95; Prodr. 314). Bois de pins, bruyères, lieux sablonneux; en groupes. — Août à Oct. — Overveen, Velsen, Heemstede. — Leiden.

78. *A. flaccidus* Sow. (Ep. 97; Prodr. 315; Fl. Bat. t. 1044). Entre les feuilles tombées dans les bois et autres lieux ombragés, parfois dans les sapinières; en groupes et formant des touffes. — Sept. à Oct. — Bloemendaal, Heemstede. — Westland.

*** Pileo candicante, flocculis superficialibus adsperso glabratove.

79. *A. catinus* Fr. (Ep. 99; O. I, 22). Sapinières. [Déc. 1865, van der Trappen]. — Overveen. — Honsholredijk.

80. *A. Tuba* Fr. (Ep. 99). Sous les sapins, entre les feuilles pourrissantes. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

Ser. B. Pileus carnoso-membranaceus, vere hygrophanus. Caro tenuis, mollis, aquosa, hygrophana.

†††† Cyathiformes. Pileo carnoso-membranaceo, disco haud compacto, cum carne hygrophano, e depresso cyathiformi; lamellis primo adnatis, dein decurrentibus. Color udus sordidus.

81. *A. cyathiformis* Fr. (Ep. 100; Prodr. 315; H. 9). Dans l'herbe au bord des chemins et des digues, et dans les bois. — Sept. à Nov. — Heemstede, Bloemendaal. — Westland, Leiden. — De Bilt, Rijzenburg. — Brummen. — Zuid-Beveland.

82. *A. expallens* P. (Fr. Ep. 100). Sous les sapins, entre les feuilles pourrissantes. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

83. *A. obbatus* Fr. (Ep. 101; Prodr. 315). Sapinières; solitaire et en groupes. — Nov. — Leiden.

84. *A. suaveolens* Schum. (Ep. 102; Prodr. 315; H. 10). Parmi la mousse dans les bois et sous les arbres, surtout sous les hêtres. — Juill. à Sept. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Driebergen.

††††† Orbiformes. Pileo subcarnoso, extus intusque udo, hygrophano, e convexo applanato depressove, polito; lamellis planis, adnatis. Color sordidus vel aquose pallescens.

* Lamellis cinerascentibus.

** Lamellis albidis.

85. *A. fragans* Sow. (Ep. 105; Prodr. 315). Parmi la mousse, tant dans les lieux découverts que dans les lieux ombragés. — Août. — Bloemendaal. — Leiden.

†††††† Versiformes. Pileo tenui, e convexo difformi, p. m. squamuloso aut furfuraceo; lamellis adnatis, latis, crassiusculis, utplurimum distantibus et albo-farinosis.

* Pileo squalente vel squamulis obscurioribus infuscato.

** Pileo laeto, unicolore.

86. *A. laccatus* Scop. (Ep. 108; Prodr. 316, H. 10; Fl. Bat. t. 824). Lieux découverts et lieux ombragés; très commun.— Juill. à Oct. — Varie beaucoup en couleur et en aspect. — Haarlem, Naarden. — Leiden, Westland. — Rijzenburg, de Bilt. — Nijmegen. — Zuid-Beveland.

87. *A. tortilis* Bolt. (Ep. 109; Prodr. 316). Lieux ombragés, au pied des arbres, au bord des chemins, etc.; en touffes. — Sept. à Oct. — Velsen. — Leiden, Westland.

VI. Collybia.

A. Lamellae albae aut laete coloratae nec cinereae. Caro alba.

† Striaepedes. Stipide valido, cavo vel medulla spongiosa subdiscreta farcto, sulcato fibrillosove-striato.

* Lamellis latis, subdistantibus.

88. *A. radicatus* Relhan (Ep. 109; O. I, 22). Au pied des arbres surtout dans les taillis de chênes. — Juill. à Oct. [A°. 1865, Oudemans]. — Oude plantage à Rotterdam. — Leersum.

89. *A. longipes* Bull. (Ep. 110; Prodr. 317). Bois et lieux herbeux ombragés. — Sept. à Nov. — Bois de la Haye. — Zuid-Beveland.

90. *A. fusipes* Bull. (Ep. 111; Prodr. 317). Au pied des troncs d'arbres et sur les branches pourrissantes dans les bois de chênes. — Juill. à Sept. — Naarden. — Leiden. — Voorst.

** Lamellis confertis, angustis.

91. *A. maculatus* A. S. (Ep. 112; O. I, 22). Sapinières. — Août à Oct. [Août 1861, Hartsen]. — Rijzenburg, Driebergen, Doorn.

92. *A. butyraceus* Bull. (Ep. 113; O. I, 22). Sapinières. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

†† Vestipedes. Stipite tenui, aequali, fistuloso aut medullato, laevi, velutino, floccoso aut pruinoso.

* Lamellis latis, subdistantibus.

93. *A. velutipes* Curt. (Ep. 115; Prodr. 317; Fl. Bat. t. 799). Sur les troncs d'ormes, de frênes, de saules, de peupliers, et sur les pieux et les bois pourrissants; en touffes. — Août à Déc. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

94. *A. trochilus* LASCH. (Ep. 116; Prodr. 318). Bois et endroits herbeux ombragés; solitaire et en groupes. — Oct. — Zuid-Beveland.

95. *A. stipitarius* Fr. (= A. cauticinalis BULL.) (Ep. 116; Prodr. 318). Sur des ramilles, des pétioles, des racines d'herbes, dans les régions sablonneuses. — Août à Oct. — Leiden. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

** Lamellis perangustis, confertissimis.

96. *A. confluens* P. (Ep. 117; Fl. Bat. t. 1085; O. II, 3). Dans les bois. [Sept. 1867, F. W. VAN EEDEN]. — Bois de Haarlem, bois de Vogelenzang.

97. *A. conigenus* P. (Ep. 118; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Sur des cônes de pins. [Oct. 1861, SPRÉE]. Lochem („de Velhorst").

98. *A. cirrhatus* SCHUM. (Ep. 119; Prodr. 318). Sur des Agaricinées pourrissantes; en groupes et formant des touffes. — Août à Oct. — Lochem („de Boekhorst"). — Zuid-Beveland.

†††† Laevipedes. Stipite tenui, aequali, fistuloso, nudo, glabro, nec conspicue striato.

* Lamellis latis, laxis, vulgo p. m. distantibus.

99. *A. collinus* SCOP. (Ep. 119; O. I, 23). Parmi l'herbe, dans les lieux sablonneux. [Oct. 1863, SIX]. — Driebergen.

** Lamellis angustis, confertis.

100. *A. acervatus* FR. (Ep. 122, Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 439). [Oct. 1871, F. W. VAN EEDEN]. Sous les sapins, entre les feuilles pourrissantes. — Meerenberg près Heemstede. — Baarn.

101. *A. dryophilus* BULL. (Ep. 122; Prodr. 319). Bois et lieux ombragés; en groupes. — Oct. à Nov. — Bois de Haarlem, Naarden. — Bois de la Haye. — Brummen.

102. *A. Michelianus* Fr. (Ep. 124; Prodr. 319). Sur les racines mortes de graminées dans les lieux sablonneux. — Oct. — Leiden.

103. *A. muscigenus* Schum. (Ep. 124; Prodr. 319). Entre les mousses, au pied des arbres; solitaire. — Oct. à Nov. — Amsterdam. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

104. *A. ludius* Fr. (Ep. 124; Prodr. 319). Sur les feuilles et les branches tombées dans les sapinières; en groupes et formant des touffes. — Nov. — Heemstede. — Zuid-Beveland.

B. Lamellae cinerascentes. Hygrophanae.

†††† Tephrophanae. Color fuscus, cinerascens.

* Lamellis confertis, subangustis.

** Lamellis perlatis, p. m. distantibus.

VII. Mycena.

† Calodontes. Lamellarum acies obscurior, denticulata.

105. *A. pelianthinus* Fr. (Ep. 130; Prodr. 320). Entre les feuilles tombées et les branches pourries, dans les bois; solitaire et en groupes. — Août. — Zuid-Beveland.

106. *A. balaninus* Berk. (Ep. 130; Prodr. 320). Au pied des troncs d'arbres et sur les branches pourrissantes, dans les bois feuillés; solitaire. — Août. — Bois de Haarlem.

107. *A. rubromarginatus* Fr. (Ep. 132; Prodr. 320). Sur les débris végétaux pourrissants dans les bois et les lieux ombragés; en groupes. — Juill. à Oct. — Baarn. — Zuid-Beveland.

†† Adonideae. Lamellae unicolores. Color purus, laetus, non fuscescens vel cinerascens. Simplices, terrestres.

108. *A. purus* P. (Ep. 133; Prodr. 321; H. 10; Fl. Bat. t. 1060). Parmi l'herbe et la mousse dans les bois ombreux des régions sablonneuses et des bruyères. — Août à Oct. — Amsterdam, Bloemendaal, Vogelenzang, Aardenhout. — Leiden, Westland. — Zeist.

109. *A. chloranthus* Fr. (Ep. 134; Prodr. 321). Bois de pins. — Août à Oct. — Près de 't Huis den Deyl.

110. *A. luteoalbus* Bolt. (Ep. 134; Ned. Kr. Arch., V, 332; O. II, 4). Sapinières, entre les aiguilles pourrissantes et les mousses. [Oct. 1861, Sprée]. — Lochem („de Velhorst").

111. *A. flavoalbus* Fr. (Ep. 135; Prodr. 321). Entre les mousses au pied des arbres, et dans les pâturages; en groupes. — Août à Nov. — Zuid-Beveland.

112. *A. lacteus* P. (Ep. 135; Prodr. 321). Parmi la mousse dans les sapinières; en groupes. — Août à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

113. *A. Benzonii* Fr. (Ep. 136; O. I, 23). Sur des corbeilles d'Orchidées dans la serre chaude du jardin botanique d'Amsterdam. [Juill. 1861; Oudemans]. — Amsterdam.

††† Rigidipedes. Tenaces, persistentes, inodori, normaliter lignatiles et valde caespitosi. Stipes basi substrigoso-radicatus. Lamellae decolorantes, ex albo griseae vel rubentes, demum venis vulgo connexae.

114. *A. cohaerens* Fr. (Ep. 137; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Sur les feuilles pourrissantes dans les bois feuillés. [Sept. 1861, Sprée]. Lochem („de Boekhorst").

115. *A. excisus* Lasch. (Ep. 137; Prodr. 322). Sur le bois mort et pourrissant, dans les bois de pins; formant des touffes. — En automne. — Haarlem.

116. *A. Fagetorum* Fr. (Ep. 138; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 240). Sur les feuilles pourrissantes du hêtre, à l'ombre épaisse des bois. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

117. *A. rugosus* Fr. (Ep. 138; Prodr. 322; H. 10). Sur les souches d'arbres vermoulues, les pieux, etc.; ordinairement solitaire, rarement en touffes. — Automne. — Leiden. — Utrecht, Rijzenburg.

118. *A. galericulatus* Scop. (Ep. 138; Prodr. 322). Sur les souches d'arbres, le bois mort, etc.; rarement solitaire, le plus souvent en touffes. — Sept. à Nov. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

119. *A. polygrammus* Bull. (Ep. 139; Prodr. 322; H. 10). Sur les souches d'arbres, le bois mort, entre les feuilles pourrissantes; solitaire et en touffes. — Oct. à Nov. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden. — Utrecht, Driebergen.

120. *A. parabolicus* Fr. (Ep. 139; Prodr. 322). Sur les troncs des pins et les pieux de bois de pin; en groupes et formant des touffes. — Oct. à Nov. — Goes.

†††† Fragilipedes. Stipes fragilis, basi fibrillosus. Lamellae decolorantes. Vulgo olidi, normaliter terrestres et simplices, pauci lignatiles et caespitosi.

121. *A. dissiliens* Fr. (Ep. 141; Prodr. 323). Dans les bois, sur les vieilles souches et entre les débris végétaux en putréfaction; formant des touffes. — Août à Sept. — Haarlem.

122. *A. leptocephalus* P. (Ep. 141; Prodr. 323). Dans les lieux herbeux humides et ombragés et dans les bois, sur les branches tombées, les feuilles, etc.; solitaire. — Oct. — Haarlem.

123. *A. alcalinus* Fr. (Ep. 142; Prodr. 323; H. 10). Sur les souches d'arbres, le bois pourrissant, etc., formant des touffes. — Juill. à Nov. — Amsterdam. — Leiden.

124. *A. plicosus* Fr. (Ep. 142; O. I, 23). Pelouses. [Oct. 1863, Oudemans]. — Jardin botanique d'Amsterdam.

125. *A. vitreus* Fr. (Ep. 143; O. I, 23). Au pied d'arbustes en caisses. [Nov. 1865, Oudemans]. — Jardin botanique d'Amsterdam.

††††† Filipedes. Stipes filiformis, flaccidus. Lamellae decolorantes. Gracillimi, stricti, terrestres, muscigeni, inodori, simplices, pileo fuscescente subpallescente, nec hygrophano.

126. *A. filopes* Bull. (Ep. 144; Prodr. 323). Dans les bois; en groupes. — Oct. à Nov. — Leiden, Naaldwijk. — Baarn. — Zuid-Beveland.

127. *A. debilis* Bull. (Ep. 145; Prodr. 323). Parmi la mousse au pied des arbres, et entre les feuilles pourrissantes dans les bois; en groupes. — Sept. à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

128. *A. vitilis* Fr. (Ep. 145; Prodr. 224). Sur les souches vermoulues etc. dans les bois, et parmi l'herbe dans les lieux ombragés; solitaire et en groupes. — Sept. à Oct. — Amsterdam. — Zuid-Beveland.

129. *A. Acicula* Schaeff. (Ep. 147; Prodr. 324). Entre les débris végétaux dans les bois feuillés; solitaire ou en groupes. — Juill. à Nov. — Leiden, Naaldwijk. — Goes.

†††††† Lactipedes. Lamellae et stipes fracti lactescentes.

130. *A. haematopus* P. (Ep. 148; Prodr. 324). Sur les souches d'arbres vermoulues; en touffes. — Leiden.

131. *A. sanguinolentus* A. S. (Ep. 148; O. I, 23). Parmi la mousse des supports d'Orchidées dans une serre chaude. — [Oct. 1865, Oudemans]. — Jardin botanique d'Amsterdam.

132. *A. galopus* P. (Ep. 149; Prodr. 324). Parmi la mousse dans les lieux ombragés. — Sept. à Oct. — Leiden.

††††††† Glutinipedes. Stipes viscosus. Lamellae dente demum decurrentes.

133. *A. epipterygius* (Ep. 149; Prodr. 325; H. 10). Sur les feuilles, les branches et autres débris, surtout dans les bois de pins. — Sept. à Oct. — Leiden. — Rijzenburg, Driebergen, Doorn, Baarn. — Zuid-Beveland.

134. *A. clavicularis* Fr. (Ep. 149; Prodr. 325). Même habitat que le précédent. — Août. — Haarlem. — Baarn.

135. *A. vulgaris* P. (Ep. 150; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Sur les aiguilles pourrissantes des pins, parmi la mousse. [Oct. 1861, Sprée]. — Baarn. — Lochem („de Velhorst)".

136. *A. citrinellus* P. (Ep. 150; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Sur les aiguilles et les ramuscules pourrissants des pins, parmi la mousse. [Oct. 1861, Sprée]. — Veenwouden.

†††††††† Basipedes. Stipes siccus, basi nuda in orbem dilatata vel bulbillosa, strigosa. Tenelli, solitarii, flaccescentes.

137. *A. stylobates* P. (Ep. 150; Prodr. 325). Sur les débris végétaux dans les bois. — Sept. à Nov. — Naaldwijk. — Zuid-Beveland.

138. *A. clavularis* Batsch. (Ep. 151; Prodr. 325). Sur les troncs vermoulus et le bois pourrissant. — Oct. — Zuid-Beveland.

139. *A. tenerrimus* Berk. (Ep. 151; O. I, 23). Sur l'écorce pourrissante d'une conifère cultivée. [Nov. 1865, Oudemans]. — Jardin botanique d'Amsterdam.

140. *A. discopus* Lév. (= *A. subtillissimus* Oud.) (Ep. 151; O. I, 24). Sur les racines d'une conifère cultivée. [Nov. 1865, Oudemans]. — Jardin botanique d'Amsterdam.

141. *A. echinipes* Lasch. (Ep. 152; Prodr. 325). Sur les débris végétaux dans les bois et dans les lieux ombragés. — Sept. à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

†††††††† Insititiae. Stipes insititius. Lamellae adnatae. Tenerrimae, sole tactae mox flaccidae.

142. *A. corticola* Schum. (Ep. 152; Prodr. 326; H. 10). Sur les troncs d'arbres couverts de mousse; en groupes. — Sept. à Nov. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

143. *A. hyemalis* Osb. (Ep. 153; Prodr. 326). Avec le précédent. — Sept. à Déc. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

144. *A. setosus* Sow. (Fr. Ep. 153; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 240). Sur les feuilles pourrissantes du hêtre. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

VIII. Omphalia.

† Collybiarii. Pileus primitus dilatatus, margine inflexo.

* Hydrogrammi. Majores, lamellis angustis, confertissimis.

145. *A. scyphoides* Fr. (Ep. 156; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Bords des chemins et des fossés, parmi l'herbe. [Juill. et Sept. 1861, Sprée]. — Lochem („de Boekhorst").

* * Pyxidati. Medii, lamellis leviter distantibus, angustis, utrinque attenuatis.

146. *A. pyxidatus* Bull. (Ep. 157; Prodr. 326). Lieux découverts et ombragés, parmi l'herbe, dans les régions sablonneuses; en groupes. — Août à Oct. — Overveen, Bloemendaal. — Westland.

147. *A. affricatus* Fr. (Ep. 158; Ned. Kr. Arch., 2e Sér. I, 165; O. II, 4). Tourbières basses, entre les *Sphagnum*. [Juill. 1870, Oudemans]. — Achttienhoven.

148. *A. oniscus* Fr. (Ep. 158; Ned. Kr. Arch. 2e Série, II, 97). Tourbières basses, entre les *Sphagnum*. [Oct. 1874, Oudemans]. Oud-Diemen près Amsterdam.

149. *A. rusticus* Fr. (Ep. 159; O. I, 24). Bruyères humides. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

150. *A. scyphiformis* Fr. (Ep. 159; Ned. Kr. Arch., 2e Série, III, 241). Bords des chemins. [Mai 1878, Melle J. Staring]. — (Lochem „de Boekhorst").

* * * Umbelliferi. Lamellis valde distantibus, latis, vulgo crassis.

151. *A. hepaticus* Batsch. (Ep. 160; Prodr. 326). Dunes, bords des chemins et des digues, parmi la mousse et l'herbe; en groupes. — Noordwijkerhout. — Zuid-Beveland.

152. *A. umbelliformis* L. (Ep. 160; Prodr. 326). Dans les lieux tourbeux, et aussi sous les arbres; en groupes. — Mai à Nov. — Amsterdam (Jard. bot.) — Smilde.

153. *A. stellatus* Fr. (Ep. 162; Prodr. 327). Sur les vieux troncs d'arbres et le bois mort; en groupes. — Oct. à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

† † Mycenarii. Pileus primitus campanulatus, margine recto, stipiti adpresso.

* Campanellae: lamellis latis, perfectis, inaequalibus.

154. *A. camptophyllus* Berk. (Ep. 163; Ned. Kr. Arch. 2e Sér., II, 35; O. II, 4). Sur les aiguilles pourrissantes des pins dans les bruyères. [Août 1873, Oudemans]. — Eemnes.

155. *A. setipes* Fr. (Ep. 164; Prodr. 327). Parmi la mousse dans les lieux ombragés. — Août. — Haarlem. — Driebergen.

156. *A. Fibula* Bull. (Ep. 164; Prodr. 327). Parmi la mousse dans les lieux ombragés. — Oct. à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

157. *A. gracillimus* Weinm. (Ep. 165; Ned. Kr. Arch. 2e Sér., I, 165; O. II, 4). Parmi la mousse au pied d'arbustes cultivés. [Juin 1871, Oudemans]. — Amsterdam (Jard. bot).

** Integrelli. Lamellis plicaeformibus, angustis.

158. *A. polyadelphus* LASCH. (Ep. 165; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 4). Sur les feuilles pourrissantes. [1861, SPRÉE]. — Veenwouden.

IX. Pleurotus.

† Excentrici. Pileus excentricus.

* Velo annulato.

159. A. *corticatus* FR. (Ep. 166; Prodr. 327). Sur les vieux troncs languissants d'arbres à feuilles. — Automne. — Westland.

160. *A. dryinus* P. (Ep. 167; Prodr. 327). Sur les troncs d'arbres à feuilles. — Automne. — Westland.

** Velo nullo. Lamellis sinuatis vel obtuse adnatis.

161 *A. ulmarius* BULL. (Ep. 167; Prodr. 327; H. 10). Sur le tronc des ormes et d'autres arbres à feuilles. — Sept. à Nov. — Amsterdam. — Rotterdam, Westland. — Zuid-Beveland.

162. *A. subpalmatus* FR. (Ep. 168; Prodr. 328). Sur les troncs et les bois vermoulus. — Oct. à Janv. — Amsterdam (sur un saule. — Zuid-Beveland.

163. *A. fimbriatus* BOLT. (Ep. 169; Prodr. 328). Au pied des troncs languissants et vermoulus d'arbres à feuilles; forme quelquefois des touffes. — Automne. — Leiden.

*** Velo nullo. Lamellis longe decurrentibus. Stipite distincto, subverticali.

164. *A. Eryngii* DC. (Ep. 171; O. I, 24). Sur les racines de l'*Eryngium campestre*. [Sept. 1864, OUDEMANS]. — Naarden (sur le Meent ou pré communal).

* * * * Velo nullo. Lamellis longe decurrentibus. Pileo laterali, sessili vel postice in basin stipitiformem obliquam, brevem, producto.

165. *A. ostreatus* Jacq. (Ep. 173; Prodr. 328; Fl. Bat. t. 780). Sur les vieux troncs d'arbres à feuilles, sur les pieux, etc.; en touffes. — Sept. à Nov. — Leiden, Westland. — Arnhem. — Zuid-Beveland.

166. *A. revolutus* Kx. (Ep. 174; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., III, 241). Sur un tronc de hêtre. [Nov. 1877; Melle J. Staring]. — Lochem („de Boekhorst").

167. *A. salignus* P. (Ep. 174; Prodr. 329; H. 10; Flor. Bat. t. 725?) Sur les souches des saules, des peupliers et des frênes; solitaire ou en touffes. — Sept. à Déc. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden. — Utrecht. — Hatert. — Zuid-Beveland.

168. *A. acerinus* Fr. (Ep. 175; Prodr. 329). Sur des hêtres pourrissants. — Oct. — Goes.

† † Dimidiati. Pileus definite lateralis, postice immarginatus.

169. *A. tremulus* Schaeff. (Ep. 177; Prodr. 329). Parmi la mousse, dans les bois. — Août. — Haarlem.

††† Resupinati. Pileus primitus resupinatus lamellis in puncto excentrico concurrentibus, dein reflexus, sessilis.

* Pileo carnoso, uniformi.

170. *A. septicus* Fr. (Ep. 179; Prodr. 329; H. 10). Sur les rameaux, les feuilles et autres débris tombés dans les bois. — Oct. à Nov. — Leiden. — Lochem. — Zuid-Beveland.

* * Pileo carnoso, striato, strato superiore gelatinoso vel pellicula viscosa.

171. *A. atrocoeruleus* Fr. (Ep. 179; O. I, 25). Sur le bois pourrissant. [Oct. 1862, Oudemans]. — Amsterdam.

172. *A. applicatus* Batsch. (Ep. 180; Prodr. 329). Sur le bois pourrissant. — Oct. à Déc. — Leiden, Westland.

* * * Pileo membranaceo, haud viscido.

173. *A. perpusillus* Fr. (Ep. 180; Prodr. 329). Sur les débris végétaux dans les bois. — Août. — Bloemendaal. — Westland.

Series II. **Hyporrhodii.**

X. Volvaria.

* Pileo sicco, sericeo vel fibrilloso.

174. *A. volvaceus* Bull. (Ep. 182; Epicr. 330; H. 10; Fl. Bat. t. 937). Sur les couches et les tas de fumiers, quelquefois dans les bois touffus; en groupes. — Juill. à Sept. — Leiden, Westland. — Utrecht.

* * Pileo p. m. viscoso et glabro.

175. *A. speciosus* Fr. (Ep. 183; Prodr. 330; H. 10). Jardins, potagers et autres terrains fumés; aussi dans les bois; solitaire. — Juill. à Sept. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

176. *A. parvulus* Weinm. (Ep. 184; Prodr. 330; O. I, 25). — Jardins, potagers et autres terrains fumés. — Juill. à Août. — Amsterdam. — Leiden.
a. pusillus. (O. I, 25).
b. major. O, I, 25).

XI. Annularia.

XII. Pluteus.

* Pilei cute in fibrillas vel floccos secedente.

177. *A. cervinus* SCHAEFF. (Ep. 185; Prodr. 330). Dans l'herbe au pied des troncs d'arbres, ainsi que sur le bois pourrissant; solitaire. — Août à Oct. — Amsterdam. — Westland. — Zuid-Beveland.

** Pileo atomato-pruinato, subpulverulento.

*** Pileo nudo, glabro.

XIII. Entoloma.

† Genuini. Pileus glaber, udus vel viscidus. Exsiccati non hygrophani.

178. *A. sinuatus* FR. (Ep. 189; O. I, 25). Au pied du tronc d'un *Cycas* dans une serre à palmiers. [Mai 1865, OUDEMANS]. — Amsterdam.

179. *A. prunuloides* FR. (Ep. 189; O. I, 25). Terrains sablonneux découverts, au bord des chemins. [Août 1864, OUDEMANS]. — Naarden. — Driebergen.

180. *A. Placenta* BATSCH. (Ep. 190; Prodr. 331). Entre les débris végétaux pourrissants dans les lieux humides. — Nov. — Amsterdam.

†† Leptonidei. Pileus flocculosus, subsquamosus, absolute siccus nec hygrophanus.

181. *A. sericellus* FR. (Ep. 194; Prodr. 331). Dans les lieux herbeux humides; en groupes. — Août à Oct. — Amsterdam.

††† Nolanidei. Pileus tenuis hygrophanus, siccus subsericeus. Saepe undulati, difformes.

182. *A. clypeatus* L. (Ep. 194; Prodr. 331; H. 10). Dans les bois et sous les arbres, parfois aussi dans l'herbe. — Au printemps et en automne. — Amsterdam. — Leiden. — Rijzenburg.

183. *A. nigrocinnamomeus* KALCHBR. (Ep. 195; Ned. Kr. Arch., III, 241. Au pied d'arbustes, dans le Vondelspark à Amsterdam. [7 Nov. 1878, OUDEMANS].

184. *A. rhodopolius* FR. (Ep. 195; Prodr. 331; H. 10). Dans les bois et sous les arbres, parfois aussi dans l'herbe. — Au printemps et en automne. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

XIV. Clitopilus.

† Orcelli. Lamellae longe decurrentes. Pileus irregularis, subexcentricus, flexuosus, vix hygrophanus, margine primum flocculoso.

185. *A. Orcella* BULL. (Ep. 197; H. 10). Bois feuillés sablonneux. — Août à Oct. [Oct. 1861, HARTSEN]. — Utrecht, Rijzenburg. — Apeldoorn, Brummen.

†† Sericelli. Pileus regularis, sericeus vel hygrophano-sericeus, margine involuto, nudo. Lamellae adnatae leviter decurrentes.

XV. Leptonia.

* Lamellis albidis.

186. *A. anatinus* LASCH. (Ep. 201; O. I, 26). Lieux sablonneux, dans l'herbe. [Juill. 1865, VAN DER TRAPPEN]. — Naaldwijk.

187. *A. lampropus* Fr. (Ep. 202; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., III, 142). Lieux sablonneux humides, parmi l'herbe et la bruyère. [Juill. 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

** Lamellis primitus coeruleis vel cyanellis.

188. *A. serrulatus* P. (Ep. 203; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., III, 143). Lieux sablonneux humides, parmi l'herbe et la bruyère. [Juill. 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

*** Lamellis fusco vel obscure purpurascentibus.

**** Lamellis pallidis.

XVI. Nolanea.

* Lamellis griseis fuscisve.

189. *A. pascuus* P. (Ep. 207; Prodr. 332). Pâturages et lieux herbeux au bord des digues, des chemins, etc.; solitaire et en groupes. — Sept. à Nov. — Baarn, Driebergen. — Zuid-Beveland.

** Lamellis lutescentibus vel rufescentibus.

*** Lamellis e candido roseis.

**** Lamellis albidis.

XVII Eccilia.

190. *A. atrides* Lasch (Ep. 212; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., I, 165; O. II, 5). Dans le sable meuble des dunes maritimes. [Sept. 1871, Oudemans].

XVIII. Claudopus.

191. *A. variabilis* P. (Ep. 213, Prodr. 338 sub Crepidoto). Sur les souches d'arbres, les pieux, les planches etc. en pourriture; formant des touffes. — Août à Nov. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

192. *A. depluens* P. (Ep. 214; Prodr. 338). Lieux humides, parmi l'herbe, la mousse, etc. — Août à Oct. — Haarlem.

Series III. **Dermini.**

XIX. Pholiota.

A. Humigeni. Terrestres nec muscis adnati.

* Eudermini, sporis ferrugineis.

193. *A. erebius* Fr. (= A. Leveilleanus Dz. et Mb.) (Ep. 217; Tijdschr. voor nat. Gesch. en Phys. XII, 277, et Novae Fungorum spec. L. Bat. 1846; Prodr. 340 sub Stropharia). Endroits couverts des bois; en groupes et formant de petites touffes. — Oct. — Leiden.

194. *A. togularis* Bull. (Ep. 216; Prodr. 332). Lieux herbeux; solitaire. — Août. — Zuid-Beveland.

** Phaeoti, sporis fuscoferrugineis.

195. *A. praecox* P. (Ep. 217; Prodr. 332). Parmi l'herbe au bord des chemins, des digues, des champs cultivés, et dans les potagers; solitaire et en groupes. — Juill. à Août. — Amsterdam. — Zuid-Beveland.

196. *A. sphaleromorphus* Bull. (Ep. 217; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., II, 97). Sur les îlots tourbeux flottants, parmi l'herbe. [Mai 1875, Oudemans]. — Sphagnetum à Oud-Diemen, près d'Amsterdam.

B. Truncigeni. Lignatiles vel epiphyti, saepius caespitosi.

* Aegeritini, pileo nudo, nec squamoso; lamellis e pallido rufescentibus vel fuscescentibus.

197. *A. radicosus* Bull. (Ep. 218; Ned. Kr. Arch. V, 332; O. II, 5). Au pied d'un tronc d'aune. [Oct. 1861, Sprée]. — Lochem („de Boekhorst").

* * Squamosi. Pileo squamoso, lamellis decolorantibus.

† Lamellis e pallido fuscescentibus, olivaceis, argillaceis nec pure ferrugineis.

198. *A. aurivellus* Batsch. (Ep. 220; Prodr. 332). Au pied des saules, des peupliers, des tilleuls, etc.; formant des touffes. — Automne. — Bois de Haarlem. — Westland. — Zuid-Beveland.

199. *A. squarrosus* Müll. (Ep. 221: Prodr. 333; H. 10; Fl. Bat. t. 743). Au pied des ormes, des pommiers, des poiriers, etc.; en touffes. — Août à Nov. — Bois de Haarlem. — Leiden, Bois de la Haye, Westland. — Utrecht, Zeist, Driebergen. — Beek et Ubbergen. — Zuid-Beveland.

†† Lamellis e luteo pure ferrugineis fulvisve.

200. *A. spectabilis* Fr. (Ep. 221; Prodr. 333; H. 10). Au pied de différentes espèces d'arbres. — Oct. à Nov. — Overveen. — Westland. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

201. *A. adiposus* Fr. (Ep. 222; H. 10). Au pied des hêtres. [Sept. 1862, Hartsen]. — Driebergen.

202. *A. lucifer* Lasch. (Ep. 222, O. I, 26). Sur une souche d'arbre. [Sept. 1865, Oudemans]. — Driebergen.

203. *A. tuberculosus* Fr. (Ep. 223; Prodr. 333). Sur les vieux troncs, les vieilles racines et les bois vermoulus; en groupes et formant de petites touffes. — Oct. à Nov. — Goes.

* * * Hygrophani. Lamellis cinnamomeis.

204. *A. mutabilis* SCHAEFF. (Ep. 225; Prodr. 333; H. 10; Fl. Bat t. 815). Au pied et sur les racines des arbres, sur le bois vermoulu, etc.; en touffes. — Automne. — Haarlem. — Westland. — Soestdijk. — Enghuizen.

205. *A. marginatus* BATSCH. (Ep. 225; Prodr. 334) Au pied des troncs d'arbres, sur le bois vermoulu, etc.; solitaire et en groupes. — Juin à Oct. — Naarden. — Zuid-Beveland.

206. *A. unicolor* FL. DAN. (Ep. 225; Prodr. 334). Sur les souches vermoulues, le bois pourrissant, les vieilles touffes de roseaux; croît en touffes. — Oct. — Brummen. — Zuid-Beveland.

C. Muscigeni. Galerae annulatae hygrophanae.

207. *A. pumilus* FR. (Ep. 226; H. 10). Parmi la mousse. [1864, SIX]. — Rijzenburg.

208. *A. mycenoides* FR. (Ep. 226; Prodr. 334). Lieux humides, parmi l'herbe, la mousse, etc.; solitaire et en groupes. — Nov. — Zuid-Beveland.

XX. Inocybe.

† Squarrosi. Pileo primitus squarroso stipetique squamoso concolore subfuscis.

209. *A. lanuginosus* BULL. (Ep. 227; Prodr. 335). Lieux sablonneux, sous les arbres, au bord des chemins, etc.; en groupes. — Sept. à Nov. — Kennemerland, Petter-Duin. — Zuid-Beveland.

† † Laceri. Pileo squamoso-vel fibroso-lacerato; stipite colorato, fibrilloso.

210. *A. maritimus* FR. (Ep. 229; Ned. Kr. Arch., 2e Sér., I, 165). Sur le sable des dunes. [Sept. 1871, OUDEMANS]. — Oostvoorne.

211. *A. lacerus* Fr. (Ep. 229; Prodr. 335). Bois de pins, lieux sablonneux, bruyères. — Août à Oct. — Naarden. — Leiden.

212. *A. carptus* Scop. (Ep. 230; O. I, 26). Au pied de grands arbustes cultivés dans des caisses. [Août à Oct. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

213. *A. deglubens* Fr. (Ep. 231; O. I, 26). Dans les bois de pins. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

††† Rimosi. Pileo longitudinaliter fibroso, mox rimoso; stipite albicante, fibrilloso.

214. *A. fastigiatus* Schaeff. (Ep. 231; Prodr. 335). Endroits herbeux sous les arbres, au bord des chemins, des digues, etc.; en groupes. — Sept. à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

215. *A. rimosus* Bull. (Ep. 232; Prodr. 335; H. 10). Dans les pâturages et parmi l'herbe au bord des chemins, des digues, etc.; en groupes. — Sept. à Nov. — Bois de Haarlem. — Leiden. — Utrecht, Zeist. — Apeldoorn. — Zuid-Beveland.

216. *A. destrictus* Fr. (Ep. 232; Prodr. 335). Comme le précédent. — Leiden. — Driebergen.

217. *A. auricomus* Batsch. (Fr. Ep. 233; Ned. Kr. Arch. 2e Sér., I, 165). [Sept. 1871, Oudemans]. — Dunes près d'Oostvoorne.

†††† Velutini. Pilei haud rimosi cuticula fibrilloso-contexta, laevigata vel adpresse squamosa, disco laevi; stipite polito glabro, albicante, apice farinaceo.

218. *A. geophyllus* Sow. (Ep. 235; Prodr. 335). Parmi l'herbe dans les bois et autres lieux ombragés; en groupes. — Sept. à Oct. — Leiden. — Baarn. — Zuid-Beveland.

219. *A. scabellus* Fr. (Ep. 235; O. I, 26). Taillis de chênes, entre les feuilles tombées. [Juill., 1864, Oudemans]. — Naarden.

††††† Viscidi. Pileo laevigato, viscido.

220. *A. strigiceps* Fr. (Ep. 236; O. I, 27). Bois de hêtres, entre les feuilles tombées. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

XXI. Hebeloma.

† Indusiati. Velo manifesto cortinati, quo pileus circa marginem saepe superficiali-sericeus.

221. *A. mussivus* Fr. (Ep. 237; Prodr. 336). Pâturages; en groupes et formant de petites touffes. — Oct. à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

222. *A. sinuosus* Fr. (Ep. 237; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 441). Bois feuillés. [Oct. 1857, F. W. van Eeden]. — Bloemendaal, Brouwerskolk, Bentveld.

223. *A. fastibilis* Fr. (Ep. 237; Prodr. 335; H. 10). Au bord des chemins et des digues, dans les pâturages, dans les bois, sous les sapins, etc.; en groupes. — Sept. à Nov. — Bloemendaal.— Leiden, Naaldwijk.— Houderingen. Baarn.

224. *A. firmus* P. (= *A. Clavus* Batsch). (Ep. 238; Prodr. 336). Lieux herbeux, pâturages, etc.; en groupes. — Sept. à Oct. — Leiden, Zuid-Beveland.

225. *A. versipellis* Fr. (Ep. 239; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Pelouses. [Oct. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

†† Denudati. Pileo glabro, cortina primitus nulla.

226. *A. sinapizans* Fr. (Ep. 240; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 441). Endroits humides des bois. [Oct., F. W. van Eeden]. — Overveen.

227. *A. crustuliniformis* BULL. (Ep. 241; Prodr. 336; H. 10). Lieux herbeux ombragés, potagers, etc.; en groupes. — Août à Oct. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht, Baarn, Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

228. *A. capniocephalus* BULL. (Ep. 242; O. I, 26). Pelouses ombragées. [Sept. 1863, OUDEMANS]. — Amsterdam (jardin botanique).

229. *A. petiginosus* FR. (Ep. 243; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 441). Sur un sentier sablonneux. Oct. [F. W. VAN EEDEN]. — Heemstede.

††† Pusilli. Pileo vix unciam lato.

XXII. Flammula.

† Gymnoti. Velum nullum. Pileus siccus, saepius squamulosus. Sporae ferrugineae.

†† Lubrici. Pileus pellicula contigua, subseparabili, glabra, viscosa tectus. Cortina manifesta, fibrillosa. Sporae ferrugineae. Gregarii, terrestres, rarius lignatiles.

230. *A. lentus* P. (Ep. 246; Matériaux II, 5; Arch. Néerl. VIII, 347). Sous un lilas, au milieu d'une touffe de *Marasmius Rotula*. [Sept. 1871, VAN DER TRAPPEN]. — Naaldwijk.

231. *A. gummosus* LASCH. (Ep. 247; O. I, 27). Sur une pelouse. [Oct. 1862, OUDEMANS]. — Amsterdam (jardin botanique).

††† Udi. Pilei cuticula contigua, glabra, jove pluvio uda vel subviscidula. Cortina manifesta, appendiculata.

†††† Sapinei. Pileus vix pelliculosus. Velum fere nullum vel in stipite annulari-cingulatum. Lamellae e flavido vel luteo fulventes. Sporae ochraceae fulvaeve. Pinicolae.

232. *A. penetrans* Fr. (Ep. 251; O. I, 27). Sur une vieille clôture en bois de sapin. [Août 1861, Oudemans]. — Amsterdam.

††††† Sericelli. Cortinati, pilei cute sericella, sicca vel primitus viscida.

233. *A. helomorphus* Fr. (Ep. 252; O. I, 27). Bois de pins. [Oct. 1863, Six].

XXII. Naucoria.

A. Gymnoti. Pileus glaber. Velum nullum. Sporae ferrugineae nec ferrugineo-fuscescentes.

* Lamellis liberis vel leviter adnexis.

** Lamellis adnatis, pileo convexo-plano.

234. *A. melinoides* Fr. (Ep. 257; O. I, 27). Pelouses. [Sept. 1863, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

*** Lamellis adnatis, pileo e campanulato expanso.

235. *A. nuceus* Bolt. (Ep. 258; Ned. Kr. Arch. 2e Série, II, 176). Bruyères tourbeuses. [Juill. 1876, Oudemans]. — Breda.

236. *A. sideroides* Bull. (Fr. Ep. 258; Ned. Kr. Arch. 2e Série III, 241). Dans les bois, entre les débris végétaux. [10 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

B. Phaeoti. Pileus nudus. Lamellae et sporae fusco-ferrugineae. Velum potentiale sed raro manifestum.

* Pediadei. In arvis et campis nascentes.

237. *A. pediades* Fr. (Ep. 260; O. I, 27). Pelouses. [Juin et Juill. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique et ailleurs). Naarden.

238. *A. semiorbicularis* Bull. (Ep. 260; Prodr. 337). Bords des chemins et des digues, potagers, etc.; en groupes. — Août à Oct. — Amsterdam, Naarden. — Zuid-Beveland.

** Scorpioidei. Locis incultis, udis, sylvaticis crescentes.

239. *A. scorpioides* Fr. (Ep. 262; H. 10). Lieux marécageux à sol tourbeux. [1863, Hartsen]. — Rijzenburg.

††† Lepidoti. Pileus flocculosus vel squamulosus. Velum manifestum. Sporae ferrugineae.

* Pilei squamulis superficialibus, secedentibus.

** Pileo innato-squamuloso.

*** Pileo squamis destituto, sericeo atomatove.

240. *A. segestrius* Fr. (Ep. 265; Ned. Kr. Arch., 2e Série, II, 99). Sur les îlots tourbeux flottants, entre les *Sphagnum*. [Oct. 1874, Oudemans]. — Oud-Diemen près d'Amsterdam.

XXIV. Pluteolus.

XXV. Galera.

* Conocephali. Pileo conico-campanulato, hygrophano, laeviusculo, sicco atomato-molli; stipite stricto; lamellis adscendentibus, in coni fundo insertis, subconfertis.

241. *A. tener* Schaeff. (Ep. 267; Prodr. 337). Jardins, bords des chemins, etc., dans l'herbe; en groupes. — Sept. à Nov. — Amsterdam. — Leiden. — Baarn. — Zuid-Beveland.

242. *A. siligineus* Fr. (Ep. 267; O. I, 28). Pelouses. [Oct. 1862, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

** Bryogeni. Pileo membranaceo, campanulato, striato, glabro, hygrophano, sicco laevi, opaco, subsericello; stipite tenui, laxo, flexili; lamellis late et plane adnatis, latis, subdenticulatis. Muscicolae.

243. *A. Hypnorum* Fr. (Ep. 270; Prodr. 337). Entre les mousses sur les sols sablonneux; en groupes. — Sept. à Nov. — Leiden, Westland. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

244. *A. Bryorum* P. (Ep. 270; Prodr. 337). Avec le précédent, mais plus disséminé. — Oct. — Zuid-Beveland.

245. *A. Sphagnorum* P. (Ep. 270; H. 10). Entre les Sphaignes. [Six]. — Rijzenburg.

246. *A. Mniophilus* Lasch (Ep. 270; Prodr. 337). Lieux humides, entre les mousses; solitaire.—Oct.—Baarn.—Zuid-Beveland.

*** Eriodermei. Pileo submembranaceo, velo manifesto, superficiali, secedente, primitus sericeo vel squamuloso.

XXVI. Tubaria.

* Genuini. Sporis ferrugineis.

247. *A. furfuraceus* P. (Ep. 272, Prodr. 336). Dans les bois et les lieux ombragés, sur les brindilles, le bois vermoulu et autres débris végétaux. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

248. *A. pellucidus* Bull. (Ep. 273; Prodr. 337). Endroits herbeux au bord des chemins, etc., sous les arbres; en groupes. — Nov. — Zuid-Beveland.

** Phaeoti. Sporis fusco-ferrugineis.

XXVII. Crepidotus.

249. *A. mollis* Schaeff. (Ep. 275; O. I, 28). Sur le bois vermoulu. [Déc. 1861, Oudemans]. — Amsterdam.

250. *A. haustellaris* Fr. (Ep. 276; Prodr. 338). Sur les troncs vermoulus des peupliers; en groupes. — Nov. — Goes.

Series IV. **Pratelli.**

XXVIII. Chitonia.

XXIX. Psalliota.

* Edules. Majores, magis carnosi.

251. *A. arvensis* Schaeff. (Ep. 278; Prodr. 339). Pâturages gras; en groupes. — Oct. et Nov. — Goes.

252. *A. campestris* L. (Ep. 279; Prodr. 338; H. 11; Fl. Bat. t. 735). Dans les lieux herbeux, au bord des chemins et des digues, dans les pâturages, quelquefois dans les bois et dans les dunes; en groupes. — Août à Nov. — Très commun.
praticola Vitt. — Naaldwijk. — Ubbergen.
villaticus Brong. — Overveen. — Utrecht.
vaporarius Krombh. — Haarlem. — Leiden.
sylvicola Vitt. — Haarlem, Naarden. — Leiden, Naaldwijk.
candicans v. d. B. — Goes.

253. *A. sylvaticus* Schaeff. (Ep. 281, O. I, 28). Bois feuillés. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

** Minores. In cibariis rejecti, pileo tenuiter carnoso.

XXX. Stropharia.

A. Viscipelles. Pilei pellicula laevi vel squamosa, saepius viscosa.

* Mundi. Haud fimicolae.

254. *A. aeruginosus* Curt. (Ep. 284; Prodr. 339; H. 11; Fl. Bat. t. 815). Pâturages, bords des chemins, bois, sur la

terre ou les souches d'arbres. — Août à Oct. — Amsterdam, Bois de Haarlem, Vogelenzang, Velzen. — Leiden, Westland. — Utrecht, de Bilt, Rijzenburg, Driebergen. — Zuid-Beveland.

255. *A. melaspermus* Bull. (Ep. 285; Prodr. 340). Parmi l'herbe dans les jardins et au bord des chemins et des digues; en groupes. — Sept. à Nov. — Amsterdam. — Goes.

256. *A. squamosus* Fr. (Ep. 285; Prodr. 340). Pâturages, bois, potagers; en groupes et formant de petites touffes. — Sept. — Haarlem. — Zuid-Beveland.

** Merdarii. Annulo saepe incompleto.

257. *A. merdarius* Fr. (Ep. 286; Prodr. 340). Sur le vieux fumier de cheval, dans les pâturages; forme de petites touffes. — Mai à Oct. — Zuid-Beveland.

258. *A. stercorarius* Fr. (Ep. 287; Prodr. 340). Sur le vieux fumier de vache, au bord des chemins; en groupes. — Sept. et Oct. — Doorn. — Zuid-Beveland.

259. *A. semiglobatus* Batsch. (Ep. 287; Prodr. 340). Dans les pâturages gras, sur les fumiers; en groupes. — Sept. et Oct. — Westland. — Zuid-Beveland.

B. Spintrigeri. Pileo epelliculoso, sed innato-fibrilloso, non viscoso.

XXXI. Hypholoma.

* Fasciculares. Colore pilei tenacis, glabri, sicci laeto nec hygrophano.

260. *A. sublateritius* Schaeff. (Ep. 290; Prodr. 341; H. 11). Sur les souches d'arbres vermoulues et dans les bois; formant des touffes. — Août et Sept. — Heemstede. — Lisse. — Rijzenburg, Driebergen, Baarn.

261. *A. elaeodes* Fr. (Ep. 291; Prodr. 341). Dans les bois sur les vieilles souches; formant des touffes. — Automne. — Amsterdam. — Leiden.

262. *A. fascicularis* Huds. (Ep. 291; Prodr. 341; H. 11; Fl. Bat. t. 824). Sur les souches d'arbres, les pieux, etc., et sur les débris végétaux cachés sous terre. — Août à Nov. — Amsterdam, Kennemerland, Gooiland. — Leiden, Westland. — Baarn, Doorn, Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

** Viscidi. Pileo nudo, viscoso.

*** Velutini. Pileo fibrillis innatis sericeo vel virgato.

263. *A. Storea* Fr. (Ep. 293; H. 11). Sur des troncs d'arbres. [1862, Six]. — Rijzenburg.

264. *A. lacrymabundus* Fr. (Ep. 293; Prodr. 342). Au pied des troncs d'arbres, dans les lieux herbeux humides; formant de petites touffes. — Oct. — Leiden, Westland.

265. *A. velutinus* P. (Ep. 293; Prodr. 342; H. 11; Fl. Bat. t. 769). Sur les sols gras, dans les jardins, au bord des chemins, dans les pâturages, parmi l'herbe; en petites touffes. — Sept. à Nov. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

*** Flocculosi. Squamis floccosis, superficialibus, secedentibus.

266. *A. intonsus* Passer. (Ep. 294; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 242). Sur la terre de grandes caisses d'arbustes; en groupes. — Sept. 1877. — Amsterdam (jardin botanique).

**** Appendiculati. Pileo glabro hygrophano.

267. *A. coronatus* Fr. (Ep. 295; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 242). Sur la terre d'une caisse contenant un *Araucaria*; en groupes. [Août 1877, Oudemans]. — Amsterdam (orangerie du jard. bot.)

268. *A. Candollianus* Fr. (Ep. 295; Prodr. 342). Aux endroits herbeux des bois, des jardins, etc., sur les pieux, les troncs d'arbres, etc. — Sept. à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

269. *A. appendiculatus* Bull. (Ep. 296; O. I, 28). Au pied des souches d'arbres, surtout des frênes; en touffes serrées. [Juill. 1862, Oudemans]. — Amsterdam, Naarden. — Leiden, Rotterdam. — Baarn.

XXXII. Psilocybe.

† Tenaces. Velum accidentale raro conspicuum. Stipes callosus, flexilis, saepius coloratus. Pileus pelliculosus, jove udo saepius viscidulus subexpallens. Color pilei laetus.

* Lamellis ventricosis, haud decurrentibus.

270. *A. udus* P. (Ep. 298; Prodr. 343). Lieux marécageux; en groupes. — Automne. — Amsterdam.

** Lamellis planis, postice latissimis, subdecurrentibus.

271. *A. coprophilus* Bull. (Ep. 299; Prodr. 343). Endroits herbeux, près des tas de fumier; en groupes. — Oct. — Zuid-Beveland.

272. *A. bullaceus* Bull. (Ep. 299; Prodr. 343). Endroits herbeux, près des tas de fumier; en groupes. — Oct. — Noordwijk aan Zee.

273. *A. atrorufus* Schaeff. (Ep. 300; Prodr. 343). Endroits ombragés des terrains sablonneux arides; solitaire et en groupes. — Sept. et Oct. — Noordwijk.

*** Lamellis sublinearibus adscendentibus.

274. *A. callosus* Fr. (Ep. 301; O. I, 28). Au bord des chemins, parmi l'herbe. [Oct. 1865, van der Trappen]. — Naaldwijk.

†† Rigidi. Velum nullum. Stipes rigidus. Pileus vix pelliculosus.

275. *A. spadiceus* Fr. (Ep. 302; H. 11). Sur les souches d'arbres et sur la terre entre les débris végétaux; formant des touffes. [Oct. 1863, Hartsen]. — Amsterdam, Haarlem. — Utrecht, Baarn.

276. *A. hygrophilus* Fr. (Ep. 302; H. 11). Sur les souches de frênes dans les bois taillis. [Oct. 1863, Hartsen]. — Rijzenburg, Utrecht.

277. *A. polycephalus* Paul. (Ep. 302; H. 11). Sur des souches d'arbres. [Oct. 1862, Hartsen]. — Utrecht.

278. *A. cernuus* Fl. Dan. (Ep. 302; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 243). Entre les débris végétaux, en des endroits ombragés; formant des touffes. [Juill. 1878, Melle J. Staring]. — Lochem.

279. *A. foenisecii* P. (Ep. 303; O. I, 28). Pelouses. [Sept. à Oct. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique et ailleurs).

XXXIII. Psathyra.

† Conopilei. Pileo conico-campanulato; lamellis adscendentibus, adnexis, saepe liberis.

280. *A. conopileus* Fr. (Ep. 304; Prodr. 343). Jardins et potagers, près des couches et des tas de fumier; solitaire et en groupes. — Oct. — Amsterdam. — Zuid-Beveland.

281. *A. corrugis* P. (Ep. 305; Prodr. 343). Sur la terre fertile, dans les jardins et ailleurs. — Sept. et Oct. — Heemstede. — Leiden. — Zuid-Beveland.

282. *A. gyroflexus* Fr. (Ep. 305; Prodr. 344). Parmi l'herbe au bord des chemins, dans les pâturages, etc.; en groupes et formant de petites touffes. — Oct. à Nov. — Amsterdam. — Leiden. — Zuid-Beveland.

†† Obtusati. Pileo campanulato-convexo, explanato, glabro vel atomato, lamellis plano vel arcuato-affixis.

283. *A. obtusatus* Fr. (Ep. 306; Prodr. 344). Sur les vieux troncs d'arbres et sur les racines cachées sous terre, dans les bois, au bord des chemins, etc.; en touffes. — Oct. et Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

††† Fibrillosi. Pileo stipiteque primitus e velo universali floccosis vel fibrillosis.

284. *A. bifrons* Berk. (Ep. 307; Ned. Kr. Arch. III, 243). Entre les débris végétaux [7 Nov. 1878; Oudemans]. — Amsterdam (Vondelspark).

285. *A. fibrillosus* P. (Ep. 308; Prodr. 344). Bois et lieux ombragés, entre les débris végétaux; solitaire. — Août à Oct. — Leiden.

286. *A. gossypinus* Bull. (Ep. 309; Prodr. 344). Dans les bois, etc., sur le bois pourrissant; en touffes. — Août à Oct. — Leiden.

Series V. **Coprinarii.**

XXXIV. Panaeolus.

* Pileo, cute gelatinoso-liquescente, viscoso, sicco nitido.

287. *A. separatus* L. (Ep. 310; Prodr. 344; Fl. Bat. t. 820). Sur le vieux fumier de vache, dans les pâturages et au bord des chemins; en touffes. — Oct. — Westland. — Zuid-Beveland.

288. *A. fimiputris* Bull. (Ep. 310; Prodr. 345; H. 11). Sur le vieux fumier de vache, dans les pâturages et au bord des chemins; solitaire et en groupes. — Août à Oct. — Bilt, Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

** Pileo udo, opaco, bibulo, sicco subflocculoso.

*** Pileo sicco, glabro, nitidulo, azono.

289. *A. campanulatus* L. (Ep. 311; Prodr. 345; H. 11; Fl. Bat. t. 820). Sur la terre fertile dans les jardins et les pâturages, et au bord des chemins. — Août à Oct. — Amsterdam, Naarden, Vogelenzang. — Leiden, Westland. — Bilt, Soestdijk, Driebergen, Doorn. — Zuid-Beveland.

290. *A. papilionaceus* Fr. (Ep. 311; Prodr. 345). Aux mêmes stations que le précédent. — Sept. — Naarden. — Zuid-Beveland.

**** Pileo sicco, glabro, circa marginem zonato.

291. *A. acuminatus* Fr. (Ep. 312; Prodr. 345). Dans les pâturages, au bord des chemins et des digues, sur les sols fertiles. — Août à Oct. — Westland.

292. *A. fimicola* Fr. (Ep. 312; Prodr. 345). Aux mêmes stations que le précédent et sur le vieux fumier. — Juill. à Oct. — Leiden.

XXXV. Psathyrella.

* Stipite stricto, glabro.

293. *A. subatratus* Fr. (Ep. 313; O. I, 28). Sur la terre fertile d'un jardin, parmi l'herbe. [Oct. 1862, Oudemans]. — Amsterdam.

294. *A. gracilis* Fr. (Ep. 313; H. 11). Lieux ombragés humides. [1862, Hartsen]. — Naarden. — De Bilt.

** Stipite flexuoso, apice pruinato.

295. *A. atomatus* Fr. (Ep. 315; Prodr. 345). Pâturages, bords des chemins, etc.; en groupes. — Leiden. — Zuid-Beveland.

296. *A. disseminatus* P. (Ep. 316; Prodr. 346; H. 11). Au pied de vieux troncs d'arbres, sur les souches vermoulues et sur la terre ombragée; en touffes. — Avril à Nov. — Amsterdam. — Rotterdam, Leiden, Westland. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

II. MONTAGNITES.

III. COPRINUS.

† Pelliculosi. Lamellae cute carnosa vel membranacea superne tectae, quare pileus non secus lamellas hiascens, sed laceratus revolutusque.

* Comati. Volvato-annulati, pilei cute in squamas lacerata.

1. *C. comatus* Fr. (Ep. 320; Prodr. 346; H. 11; Fl. Bat. t. 590). Sur la terre grasse, au bord des chemins et des digues, dans les pâturages, etc.; en groupes. — Mai à Nov. — Amsterdam, Bois de Haarlem, Bloemendaal. — Leiden. — Utrecht. — Zuid-Beveland. — Groningen.

2. *C. ovatus* Fr. (Ep. 320; Prodr. 346; H. 11; Fl. Bat. t. 875). Aux mêmes stations que le précédent; en groupes. — Août à Nov. — Amsterdam, Velsen. — La Haye, Westland. — Utrecht. — Nymegen.

** Atramentarii. Subannulati, pileo squamulis minutis, innatis punctato maculatove.

3. *C. atramentarius* Fr. (Ep. 322; Prodr. 347; H. 11; Fl. Bat. 875). Sur la terre grasse dans les jardins, les potagers, les vergers, les pâturages, au bord des chemins et des digues, etc.; en touffes. — Sept. à Nov. — Amsterdam, Bois de Haarlem. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

4. *C. soboliferus* Fr. (Ep. 322; Prodr. 347). Sur la terre grasse des couches, ou dans leur voisinage; en touffes. — Août à Nov. — Amsterdam (jardin botanique). — Leiden.

5. *C. fuscescens* Fr. (Ep. 322; Prodr. 347; H. 11). Au pied des vieux troncs d'arbres et sur les souches vermoulues; en touffes. — Sept. à Nov. — Amsterdam (sur des souches d'érables). — Leiden. — Zuid-Beveland.

* * * Picacei. Velo universali flocculoso, primo contiguo, dein in squamas pilei superficiales areolatim rupto.

* * * * Tomentosi. Pileo floccis discretis villove laxo secedentibus primo velato. Annulus nullus.

6. *C. exstinctorius* Fr. (Ep. 324; Prodr. 347). Jardins, bords des chemins, etc.; ordinairement solitaire. — Août et Sept. — Amsterdam (jardin botanique). — Zuid-Beveland.

7. *C. fimetarius* Fr. (Ep. 324; Prodr. 347). Dans les fosses à fumier; en groupes et formant de grosses touffes. — Juin à Août. — Zuid-Beveland.

8. *C. tomentosus* Fr. (Ep. 325; Prodr. 348). Sur les terres fumées, sur les débris végétaux ou près de ces débris. — Mai à Sept. — Leiden. — Zuid-Beveland.

9. *C. niveus* Fr. (Ep. 325; Prod. 348). Sur le vieux fumier de vache ou de cheval; en groupes. — Sept. à Nov. — Bois de Haarlem. — Zuid-Beveland.

* * * * * Micacei. Pileo squamulis vel granulis micaceis secedentibus tecto. Annulus nullus.

10. *C. tergiversans* Fr. (Ep. 325; H. 11). Sur le gazon. [1862, Hartsen]. — Utrecht.

11. *C. micaceus* Fr. (Ep. 325; Prodr. 348; H. 11; Fl. Bat. t. 820). Au bord des chemins et des fossés, dans les pâtu-

rages, les jardins, les potagers, ainsi que sur les vieux pieux et les vieux troncs d'arbres; en touffes. — Août à Nov. — Amsterdam, Overveen, Bloemendaal. — Leiden, Westland. — De Bilt. — Zuid-Beveland.

12. *C. truncorum* Fr. (Ep. 326; Prodr. 348). A la surface ou à l'intérieur des souches vermoulues des saules; formant de petites touffes. — Avril. — Zuid-Beveland.

****** Glabrati. Pileo glabrato absque squamulis floccosis vel micaceis. Velum nullum.

13. *C. deliquescens* Fr. (Ep. 327; Prodr. 348). Dans les bois, sur les vieux troncs d'arbres et entre les feuilles pourrissantes; en groupes et formant des touffes. — Sept. et Oct. — Leiden, Westland.

14. *C. Digitalis* Fr. (Ep. 327; O. I, 29). Bois feuillés à sol sablonneux. [Août 1861, Hartsen]. — Bois de Bloemendaal.

†† Veliformes. Pileus tenuissimus, epelliculosus, demum secundum dorsum lamellarum hiascens, plicato-sulcatus. Stipes tenuis, fistulosus. Lamellae in lineas tenuissimas tabescentes.

* Cyclodei. Stipite annulato velatove.

15. *C. Trappenii* Oud. (Ep. 704; O. I, 29). Sur des ramilles d'arbres desséchées. [Août. 1865, van der Trappen]. — Naaldwijk.

** Lanatuli. Pileo flocculis superficialibus secedentibus velato, lamellis liberis. Exannulati.

16. *C. lagopus* Fr. (Ep. 329; Prodr, 349). Au bord des terres cultivées, dans les potagers, le long des chemins, des

haies etc., ainsi qu'entre les broussailles et au pied des troncs d'arbres. — Sept. et Oct. — Amsterdam (jardin botanique). — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

17. *C. radiatus* Fr. (Ep. 330; Prodr. 349). Sur le vieux fumier de vache; en groupes. — Juill. à Sept. — Amsterdam. — Westland. — Zuid-Beveland.

*** Furfurelli. Pileo micaceo vel furfuraceo, lamellis vulgo apici stipitis in annulum dilatato adnatis. Exannulati.

18. *C. stercorarius* Fr. (Ep. 330; Prodr. 349). Sur du fumier de cheval. — Oct. — Westland.

19. *C. Friesii* Quél. (Ep. 331; Ned. Kr. Arch. 2e Sér. III, 244). Sur l'herbe desséchée. — De Boekhorst près de Lochem (Oct. 1878, Melle Staring).

20. *C. ephemerus* Fr. (Ep. 331; Prodr. 349). Dans les potagers et sur d'autres terrains fumés; en groupes et formant de petites touffes. — Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

21. *C. sociatus* Fr. (Ep. 331; Prodr. 349). Lieux humides, parmi l'herbe. — Oct. — Amsterdam. — Leiden.

22. *C. plicatilis* Fr. (Ep. 331; Prodr. 349; H. 11). Parmi l'herbe dans les jardins, au bord des chemins, etc.; en groupes. — Juill. à Oct. — Amsterdam, Gooiland. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Nijmegen. — Zuid-Beveland.

**** Hemerobii. Pileo semper glabro. Exannulati.

23. *C. hemerobius* Fr. (Ep. 332; Prodr. 350). Lieux humides, parmi le fumier et les débris végétaux en putréfaction; en groupes et formant de petites touffes. — Oct. — Zuid-Beveland.

IV. BOLBITIUS.

1. *B. hydrophilus* Fr. (Ep. 333; Prodr. 342 sub Agarico). Sur les troncs d'arbres et entre les feuilles pourrissantes, dans les vergers et les bois. — Oct. — Naarden. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

2. *B. vitellinus* Fr. (Ep. 333; Prodr. 350). Dans les pâturages etc., à la surface ou au voisinage des tas de fumiers et des débris végétaux pourrissants; en touffes. — Mai à Nov. — Zuid-Beveland.

3. *B. tener* Berk. (Ep. 335; O. I, 29). Sur les pelouses. [Juill. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

V. CORTINARIUS.

I. Phlegmacium. Velum partiale araneosum. Pileus aequaliter carnosus, viscosus. Stipes firmus, siccus.

† Cliduchii. Velum partiale superum, ex apice stipitis subaequalis vel clavati annulari-pendulum.

* Lamellis e pallido argillaceis.

** Lamellis e violaceo vel purpurascente violaceis.

1. *C. largus* Fr. (Ep. 339; H. 11). Bois de sapins. [Oct. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

*** Lamellis luteis, cinnamomeis, ferrugineis.

**** Lamellis olivaceis.

†† Scauri. Bulbus depressus vel turbinatus, marginatus. Stipes carnosus, fibrosus, cortina a bulbi margine, vulgo infera. Pileus aequaliter carnosus. Lamellae subsinuatae.

* Lamellis ex albido argillaceis vel dilute cinnamomeis.

** Lamellis violaceis, cyaneis, purpurascentibus, demum cinnamomeis.

2. *C. subpurpurascens* Fr. (Ep. 346; Prodr. 351). Bois feuillés; solitaire. — Août. — Haarlem.

*** Lamellis ferrugineis, fulventibus luteisve.

**** Lamellis olivaceis.

††† Elastici. Cortina simplex, tenuis. Stipes primitus exsertus, rigido-elasticus, extus subcartilagineus, politus, nitens.

* Lamellis ex albido argillaceis vel sordide cinnamomeis.

** Lamellis violaceis, purpurascentibus, incarnatis.

*** Lamellis pure ochraceis, fulvis, ferruginascentibus.

**** Lamellis olivaceis, fuligineis.

II. Myxacium. Velum univ. glutinosum, unde stipes simul viscosus. Pileus carnosus, subtenuis. Lamellae adnatae, decurrentes.

† Colliniti. Stipes floccoso-peronatus, floccis glutine primo obtectis.

3. *C. collinitus* Fr. (Ep. 354; Prodr. 351). Dans les bois, parmi les feuilles pourrissantes, etc.; en groupes. — Bois de la Haye. — Rijzenburg.
β. mucosus Fr. (Ep. 355). Dans les dunes. — Walcheren.

†† Delibuti. Velum mere viscidum, hinc stipes non simul floccoso-peronatus, siccus vernicosus.

* Lamellis ex albido argillaceis.

** Lamellis primo violaceis, cyaneis, rubellis.

*** Lamellis primitus ochraceis vel cinnamomeis.

4. *C. vibratilis* Fr. (Ep. 358; Ned. Kr. Arch. V, 333). Bois de sapins. [Sept. 1861, Sprée]. — Lochem („de Boekhorst").

III. Inoloma. Pileus aequaliter carnosus, siccus etc. Velum simplex. Stipes carnosus, subbulbosus.

* Lamellis primo albis pallidisve.

5. *C. opimus* Fr. (Ep. 359; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 244). Dans les bois. [10 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

6. *C. argentatus* Fr. (Ep. 360; Prodr. 351). Dans les bois, aux endroits herbeux et couverts. — Sept. — Leiden.

** Lamellis cum velo stipiteque violascentibus.

7. *C. cinereo-violaceus* Fr. (Ep. 361; Prodr. 351; H. 11; Fl. Bat. t. 844). Bois feuillés et lieux ombragés. — Oct. — Rijzenburg. — Neerbosch.

8. *C. albo-violaceus* Fr. (Ep. 361; Prodr. 352). Bois feuillés. — Oct. — Leiden.

*** Lamellis velove cinnamomeis, rubris, ochraceis.

9. *C. tophaceus* Fr. (Ep. 363, H. 11). Bois feuillés. [1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

**** Lamellis velove obscuris, fuscis, olivaceis.

IV. Dermocybe. Pileus primo sericeus, siccus nec hygrophanus. Velum simplex, fibrillosum.

* Lamellis primo albidis vel pallidis.

** Lamellis primo violaceis, purpurascentibus.

10. *C. caninus* Fr. (Ep. 368; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 244). Dans l'herbe sous des hêtres. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

11. *C. azureus* Fr. (Ep. 368; Prodr. 352; H. 11). Bois de hêtres, parmi la mousse et les feuilles tombées. — Oct. — Haarlem.

*** Lamellis nitide cinnamomeis, rubris, luteis, etc.

12. *C. cinnabarinus* Fr. (Ep. 370; O. I, 29). Bois de hêtres. [Juill. 1861, W. J. van Geuns]. — Brummen.

13. *C. cinnamomeus* Fr. (Ep. 370; Prodr. 352; H. 11). Bois feuillés et lieux ombragés; solitaire et en groupes. — Sept. — Leiden, Westland. — Rijzenburg, Baarn.
β. *semisanguineus* Fr. — Driebergen, Rijzenburg, Baarn. — Enghuizen, Arnhem.

14. *C. croceus* Schaeff. (Ep. 371; O. I, 29). Sur les alluvions couvertes de roseaux, entre les Sphaignes. [Août 1863, Oudemans]. — Leimuiden.

*** Olivascentes, velo sordide pallido fuscove, etc.

15. *C. raphanoides* Fr. (Ep. 373; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 443). Bois feuillés. [Oct. 1868, F. W. van Eeden]. — Overveen.

V. Telamonia. Pileus udus, hygrophanus. Stipes velo universali infero annulatus vel peronato-squamosus, etc.

† Platyphylli. Lamellae perlatae, crassiusculae, p. m. distantes. Stipes spongiosus vel totus fibrosus.

* Stipite cortinaque albis vel albidis.

16. *C. bivelus* Fr. (Ep. 375; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 443). Dans les bois. [Oct. 18 ?, van Eeden]. — Overveen.

** Stipite lamellisque violaceis.

17. *C. evernius* Fr. (Ep. 377; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 443). Sous les haies bordant les chemins. [Oct. 18 ?, van Eeden]. — Overveen.

*** Stipite veloque rubellis luteisve.

**** Stipite fuscescente, velo fusco vel sordido, lamellis obscuris.

18. *C. brunneofulvus* Fr. (Ep. 381; H. 11). Sapinières. [Oct. 1861, Hartsen]. — Driebergen.

19. *C. glandicolor* Fr. (Ep. 382; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 443). Sapinières. [Oct. 18 ?, F. W. van Eeden]. — Bloemendaal.

†† Leptophylli. Lamellae angustae, tenues, p. m. confertae. Pileus tenuis. Stipes extus rigidior, subcartilagineus, farctus cavusve, deorsum saepe attenuatus.

* Stipite albido, pallido, non floccoso-squamoso.

** Stipite violascente.

*** Stipite pileoque fulvis, ferrugineis.

20. *C. incisus* Fr. (Ep. 384; Prodr. 352). Le long des chemins, etc., sous les arbres et les buissons; en groupes. — Sept. — Leiden.

**** Stipite floccoso-squamoso pileoque fuscescentibus.

VI. Hydrocybe. Pileus glaber vel fibrillis superficialibus albis tantum tectus, non viscosus, sed vegetus udus, etc.

† Firmiores. Pileus margine primo incurvo.

* Stipite albo, cortina concolore.

21. *C. subferrugineus* Fr. (Ep. 387; Prodr. 353). Dans les vergers, les bois, etc.; en groupes. — Oct. et Nov. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

22. *C. armeniacus* Fr. (Ep. 387; Prodr. 353). Sapinières; solitaire et en groupes. — Août. — Leiden (Huis den Deyl).

23. *C. dilutus* Fr. (Ep. 389; Prodr. 353). Bois humides; solitaire et en groupes. — Oct. — Leiden.

** Stipite lamellisque vulgo violascentibus.

24. *C. castaneus* Fr. (Ep. 391; O. I, 29). Bois à aiguilles, aux endroits couverts. [Oct. 1867, Six). — Driebergen, Baarn.— Apeldoorn.

*** Stipite veloque subobsoleto luteis rufisve.

**** Stipite fuscescente.

†† Tenuiores. Pileus margine primo recto.

* Stipite albo.

25. *C. rigens* Fr. (Ep. 395; Ned. Kr. Arch. V, 294). [Oct. 1861, Hartsen]. — Driebergen.

* * Stipite violascente vel rubello.

* * * Stipite lutescente, vulgo pallescente.

* * * * Stipite fuscescente.

VI. GOMPHIDIUS.

1. *G. glutinosus* Fr. (Ep. 399; Prodr. 354; H. 11). Bois de pins. — Juill. à Oct. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede, Naarden. — Baarn, Zeist, Driebergen.
2. *G. roseus* Fr. (Ep. 400; H. 11). Bois de pins. [Oct. 1862, Six]. Utrecht, Rijzenburg, Doorn.
3. *G. viscidus* Fr. (Ep. 400; Prodr. 354; H. 11). Bois de pins. — Sept. — Bloemendaal, Overveen, Vogelenzang. — Rijzenburg.
4. *G. testaceus* Fr. (Ep. 400; O. I, 30). Bois de pins. [Oct. 1864, Six]. — Driebergen.

VII. PAXILLUS.

† Lepista. Pileus integer centralis. Sporae sordidae.

†† Tapinia. Pileus vulgo excentricus vel resupinatus. Sporae ferrugineae.

1. *P. sordarius* Fr. (Ep. 401, Ned. Kr. Arch. V, 294. — Oct. 1861, Hartsen).
2. *P. involutus* Fr. (Ep. 403; Prodr. 353; H. 11; Fl. Bat. t. 453). Endroits ombragés aux bords des chemins, broussailles, etc. — Sept. et Oct. — Amsterdam, Overveen, Castricum, Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Rijzenburg, Baarn. — Nijmegen, Lochem. — Zuid-Beveland.

3. *P. atrotomentosus* Fr. (Ep. 403; Prodr. 354). Dans les bois de pins, à terre et sur les chicots; solitaire et en groupes. — Juill. à Sept. — Overveen, Bloemendaal. — de Steeg (Rhederoord). — Breda (dans le „Mastbosch").

4. *P. panuoides* Fr. (Ep. 404; O. I, 30). Sur les troncs vermoulus des sapins. [Sept. 1863, Six]. — Driebergen. — Lochem.

VIII. HYGROPHORUS.

† Limacium. Velum universale viscidum, etc.

* Albi vel albo-lutescentes.

** Rubentes.

1. *H. purpurascens* Fr. (Ep. 407; Prodr. 354). Bois de pins; en groupes. — Oct. — Haarlem.

*** Fulventes vel flavi.

**** Olivaceo-umbrini.

2. *H. limacinus* Fr. (Ep. 409; H. 12). Bois feuillés. [Oct. 1862, Hartsen]. — Utrecht (Vossegat), Driebergen.

3. *H. hypothejus* Fr. (Ep. 410; Prodr. 355; H. 15). Bois de pins. — Oct. et Nov. — Bloemendaal. — Rijzenburg, Doorn.

***** Fusco-cinerei vel lividi.

†† Camarophyllus. Velum nullum. Stipes laevis, glaber, vel fibrillosus nec punctato-scaber. Pileus firmus, opacus, udus, non viscosus.

* Lamellis longe et demum obconice decurrentibus.

4. *H. pratensis* Fr. (Ep. 413; Prodr. 355). Dans les pâturages; en groupes. — Sept. et Oct. — Westland. — Zuid-Beveland.

5. *H. virgineus* Fr. (Ep. 413; Prodr. 355). Parmi l'herbe au bord des chemins et des digues, dans les pâturages, etc. — Sept. et Oct. — Leiden, Westland. — Baarn. — Zuid-Beveland.

6. *H. niveus* Fr. (Ep. 414; Prodr. 355). Parmi l'herbe au bord des chemins et des digues, dans les pâturages, etc. — Oct. — Westland. — Zuid-Beveland.

** Lamellis ventricosis, sinuato-arcuatis vel plano-adnatis.

††† Hygrocybe. Velum nullum. Totus fungus fragilis. Pileus udus viscidus, siccus nitens, etc.

* Lamellis decurrentibus.

7. *H. ceraceus* (Ep. 417; Prodr. 356). Dans les pâturages et les vergers; en groupes et formant de petites touffes. — Nov. — Goes.

8. *H. coccineus* Fr. (Ep. 417; Prodr. 356; Fl. Bat. t. 810). Parmi la mousse dans les lieux humides (pâturages, pelouses, îlots tourbeux flottants, etc. — Juill. à Oct. — Amsterdam. — Westland, Leimuiden.

9. *H. miniatus* Fr. (Ep. 418; Prodr. 356). Parmi la mousse ou l'herbe dans les lieux humides. — Août à Oct. — Haarlem. — Leiden, Westland. — Driebergen. — Lochem. — Zuid-Beveland.

** Lamellis adnexis, subsecedentibus.

10. *H. puniceus* Fr. (Ep. 419; Prodr. 356). Dans l'herbe au bord des chemins, des digues, etc.; solitaire. — Sept. — Zuid-Beveland.

11. *H. obrusseus* Fr. (Ep. 419; Prodr. 356). Dans les pâturages gras et fertiles; en groupes. — Oct. — Zuid-Beveland.

12. *H. conicus* Fr. (Ep. 419; Prodr. 356; Fl. Bat. 810 et 845). Le long des chemins et des digues, dans les pâturages et dans les endroits herbeux des bruyères et des dunes; en groupes. — Août à Oct. — Dunes de Calantsoog et de Petten; Heerenduinen près Velsen. — Leiden, Westland.— Nijmegen. — Zuid-Beveland.

13. *H. chlorophanus* Fr. (Ep. 420; Prodr. 357). Pâturages et lieux herbeux. — Automne. — Westland.

14. *H. psittacinus* Fr. (Ep. 420; Prodr. 357). Aux mêmes stations que le précédent; en groupes. — Oct. — Westland. — Bunnik. — Zuid-Beveland.

15. *H. unguinosus* Fr. (Ep. 421; O. I, 30). Entre les feuilles tombées des chênes. [Août 1864, Oudemans].

IX. LACTARIUS.

† Piperites. Stipes centralis. Lamellae immutabiles, nudae nec decolorantes neque pruinosae. Lac primitus album, (vulgo) acre.

* Tricholomoidei. Pileo udo viscido, margine primo involuto, tomentoso.

1. *L. scrobiculatus* Fr. (Ep. 422; O. I, 30). Bois de sapins. [2 Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

2. *L. torminosus* Fr. (Ep. 422; Prodr. 357; H. 12; Fl. Bat. t. 825). Dans les bois et aux endroits ombragés des bruyères et des lieux sablonneux; en groupes. — Automne. — Bloemendaal, Castricum, Santpoort. — Westland. — Utrecht, Rijzenburg.

3. *L. turpis* Fr. (Ep. 423; Prodr. 357; H. 12; Fl. Bat. t. 835). Dans les bois à aiguilles et dans les bois à feuilles. — Oct. — Hilversum. — Westland. — Bois de Baarn, Zeist.

4. *L. controversus* Fr. (Ep. 423; Prodr. 358; H. 12; Fl. Bat. t. 1094). Pâturages et vergers; en groupes et formant de petites touffes. — Sept. et Oct. — Heemstede. — Utrecht. — Zuid-Beveland.

5. *L. pubescens* Fr. (Ep. 424; H. 12). Dans les bois feuillés. [Oct. 1861, Hartsen]. — Velsen, Overveen. — Rijzenburg.

** Limacini. Pileo udo viscido, pelliculoso, margine nudo.

6. *L insulsus* Fr. (Ep. 424; Prodr. 358). Lieux herbeux ombragés. — Août et Sept. — Velsen, Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Leiden. — Zuid-Beveland.

7. *L. zonarius* Fr. (Ep. 425; Prodr. 358; Fl. Bat. t. 825). Lieux herbeux ombragés. — Oct. — Lisière des dunes de Haarlem. — Westland.

8. *L. blennius* Fr. (Ep. 425; Prodr. 358; H. 12). Bois de sapins et de hêtres. — Sept. et Oct. — Velsen, Bloemendaal, Overveen, Bois de Haarlem. — Noordwijkerhout. — de Bilt, Bois de Baarn.

9. *L. trivialis* Fr. (Ep. 426; Prodr. 358; H. 12). Bois de sapins. — Juill. à Oct. — Leiden. — Utrecht.

10. *L. uvidus* Fr. (Ep. 426; Prodr. 358). Dans les bois, aux endroits humides et herbeux. — Août. — Haarlem.

*** Piperati. Pileo epelliculoso, hinc absolute sicco, saepius impolito.

11. *L. flexuosus* Fr. (Ep. 427; Prodr. 358). Bois de sapins. — Juill. à Oct. — Le long de la chaussée de Leiden à la Haye.

12. *L. pyrogalus* Fr. (Ep. 427; H. 12). Bois de hêtres. [4 Oct. 1863; Six]. — Rijzenburg, de Bilt, Driebergen, Baarn.

13. *L. acris* Fr. (Ep. 429; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 244). Bois de hêtres. [26 Sept. 1878, Oudemans. — Baarn.

14. *L. piperatus* Fr. (Ep. 430; Prodr. 358; Fl. Bat. t. 825). Pâturages, vergers et lieux herbeux ombragés; en groupes. — Sept. et Oct. — Bois de Haarlem. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

15. *L. vellereus* Fr. (Ep. 430; H 12). A l'ombre des grands arbres sur les gazons. [Oct. 1862, Hartsen]. — de Bilt, Baarn. — Lochem, Brummen.

†† Dapetes. Stipes centralis. Lamellae nudae; lac primitus saturate coloratum.

16. *L. deliciosus* Fr. (Ep. 431; Prodr. 359). Dans les bois de sapins. — Juill à Oct. — Bloemendaal, Santpoort, Overveen, Heemstede. — Rijzenburg, Driebergen, Baarn.

††† Russularia. Stipes centralis. Lamellae e pallido decolorantes, dein obscuriores, demum albo-pruinosae. Lac primitus album, mite vel e miti acre.

* Pileo primitus viscoso.

17. *L. pallidus* Fr. (Ep. 431; O. I, 30). Bois de hêtres. [2 Oct. 1863, Six). — Driebergen.

18. *L. quietus* Fr. (Ep. 431; Prodr. 359). Dans les bois feuillés et sous les broussailles. — Juill. et Août. — Leiden, Westland.

19. *L. aurantiacus* Fr. (Ep. 432; Prodr. 359). Bois feuillés. — Haarlem.

20. *L. thejogalus* Fr. (Ep. 432; Prodr. 359). Bois feuillés. — Oct. — Westland.

21. *L. vietus* Fr. (Ep. 432; Prodr. 359). Dans les bois, aux endroits humides et herbeux. — Oct. — Leiden.

** Pileo impolito, squamuloso, villoso vel pruinoso.

22. *L. rufus* Fr. (Ep. 433; Prodr. 360; H. 12). Bois de sapins. — Sept. et Oct. — Bloemendaal, Naarden. — Huis den Deyl près Leiden. — Rijzenburg, Baarn.

23. *L. glyciosmus* Fr. (Ep. 434; Ned. Kr. Arch. 2e Série, II, 176). Bois de sapins. [22 Juill. 1876, Oudemans]. — Baarn. — Breda (dans le Mastbosch).

24. *L. lignyotus* Fr. (Ep. 434; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 143). Gazons ombragés au bord des chemins. [Juill 1877, Oudemans]. — Hoenderloo.

*** Pileo polito, glabro.

25. *L. ichoratus* Fr. (Ep. 436; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 143). Dans l'herbe au pied de grands arbres. [Juill 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

26. *L. serifluus* Fr. (Ep. 436; Prodr. 359). Lieux humides ombragés. — Leiden.

27. *L. subdulcis* Fr. (Ep. 437; Prodr. 360; H. 12). Vergers, bois et lieux herbeux; en groupes. — Sept et Oct. — Bloemendaal, Santpoort, Bois de Haarlem. — Leiden. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

28. *L. camphoratus* Fr. (Ep. 437; O. I, 30). Bois de sapins. [2 Oct. 1863, Six].

29. *L. obnubilis* Lasch (= L. obscuratus ej.) (Fr. Ep. 438; Prodr. 360). Dans les vergers et les bois, aux endroits herbeux et moussus; en groupes. — Oct. — Leiden.

†††† Pleuropus. Stipes excentricus vel lateralis. Truncigeni.

X. RUSSULA.

† Compactae. Pileus ubique carnosus, unde margo primo infractus, semper exstrius, absque pellicula viscosa discreta. Caro compacta, firma. Stipes solidus, carnosus. Lamellae inaequales.

1. *R. nigricans* Fr. (Ep. 439; Prodr. 360; H. 12). Dans les bois. — Sept. — Bois de Haarlem. — Leiden. — Rijzenburg, Baarn.

2. *R. adusta* Fr. (Ep. 439; H. 12). Dans les bois. [Oct. 1861, Hartsen]. Rijzenburg.

3. *R. delica* Fr. (Ep. 440; H. 12). Dans les bois. [Oct. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

†† Furcatae. Pileus compactus, firmus, pellicula tenui, arcte adnata, demum disparente tectus, margine abrupte tenui, primo inflexo dein patente, acuto, laevi. Stipes primo compactus, demum intus spongioso-mollis. Lamellae subfurcatae immixtis paucis brevioribus, vulgo utrinque attenuatae, tenues et normaliter angustae.

4. *R. furcata* Fr. (Ep. 441; Prodr. 360). Dans les bois. — Sept. et Oct. — Heemstede. — Leiden. — Baarn.

5. *R. rosacea* Fr. (Ep. 442; H. 12). Dans les bois à aiguilles. [Août 1863, Six]. — Rijzenburg, Driebergen. — Ginneken (bois de pins).

6. *R. depallens* Fr. (Ep. 442; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 244). Dans les bois. [Oct. 1878, Oudemans]. — Bois de Baarn.

7. *R. coerulea* Fr. (Ep. 443; H. 12). Dans les bois. [Oct. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

††† Rigidae. Pileus absolute siccus, rigidus, cuticula vulgo in floccos vel granula fatiscente. Caro crassa, compacta, firma, ante marginem rectum, semper exstrium evanescens. Stipes solidus. Lamellae paucae dimidiatae, aliae divisae, rigidae, ante dilatatae et apice latissimo rotundato excurrentes.

8. *R. lactea* Fr. (Ep. 443; Ned. Kr. Arch. 2e Série III, 144). Le long de sentiers ombragés par des hêtres. [Juill. 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

9. *R. virescens* Fr. (Ep. 443; Ned. Kr. Arch. V, 333; O. II, 5). Le long de chemins ombragés par des hêtres. [Spréé]. — Lochem („de Boekhorst").

10. *R. rubra* Fr. (Ep. 444; Prodr. 360). Dans les bois. — Oct. — Haarlem.

11. *R. Linnaei* Fr. (Ep. 444; Prodr. 360). Dans les bois. — Sept. — Bloemendaal.

12. *R. olivacea* Fr. (Ep. 445; Prodr. 361). Dans les bois. — Juill. — Zuid-Beveland.

†††† Heterophyllae. Pileus carnosus, firmus, margine tenui primo inflexo, dein expanso striato, pellicula tenui adnata tectus. Lamellae multae breviores longioribus immixtae, aliae simul furcatae. Stipes solidus, validus, intus spongiosus.

13. *R. vesca* Fr. (Ep. 446; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 445). Dans les bois de sapins. [Nov. 1871, van Eeden]. — Overveen.

14. *R. heterophylla* Fr. (p. 446; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 144). Dans les bois. [Juill. 1877, Oudemans]. — Baarn. — Apeldoorn.

15. *R. foetens* Fr. (Ep. 447; H. 12). Dans les bois. [Oct. 1861, Hartsen]. — Sept. à Nov. — Rijzenburg, Driebergen. — Bloemendaal, Overveen, Bois de Haarlem.

††††† Fragiles. Pileus p. m. carnosus rigido-fragilis, pellicula semper contigua, jove pluvio viscida et subseparabili tectus; margo membranaceus, primo connivens, in adultis vulgo sulcatus tuberculosusque. Caro vulgo floccosa, laxa, friabilis. Stipes spongiosus. Lamellae fere omnes aequales simplices, antice latescentes.

* Lamellis sporisque albis.

16. *R. emetica* Fr. (Ep. 448; Prodr. 361; H. 12). Dans les bois. — Sept. et Oct. — Bloemendaal, Bois de Haarlem, Bennenbroek. — Leiden. — Rijzenburg.

17. *R. pectinata* Fr. (Ep. 449; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 245). Dans les bois. [Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

18. *R. ochroleuca* Fr. (Ep. 449; Prodr. 361; H. 12). Lieux herbeux ombragés. — Sept. et Oct. — Leiden. — Rijzenburg.

19. *R. fragilis* Fr. (Ep. 450; Prodr. 361). Bois, bords des chemins et des digues, vergers et pâturages. — Août à Oct. — Leiden, Bois de la Haye, Westland. — Baarn. — Zuid-Beveland.

** Lamellis sporisque ex albo flavidis vel laete citrinis.

20. *R. integra* Fr. (Ep. 450; Prodr. 361). Bois et lieux herbeux ombragés. — Sept. et Oct. — Leiden, Westland. — Baarn.

21. *R. aurata* Fr. (Ep. 452; H. 12). Dans les bois. [Sept. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

22. *R. nitida* Fr. (Ep. 452; Prodr. 361). Dans les bois, aux endroits moussus; en groupes. — Sept et Oct. — Leiden.

*** Lamellis sporisque ochraceis.

23. *R. alutacea* Fr. (Ep. 453; H. 12). Dans les bois. [Oct. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

XI. CANTHARELLUS.

† Mesopus. Pileus integer. Stipes centralis.

* Pileo stipiteque solido carnosis.

1. *C. cibarius* Fr. (Ep. 455; Prodr. 362; H. 12; Fl. Bt. t. 660). Bois à aiguilles et bois à feuilles; en groupes. — Juin à Oct. — Bois de Haarlem, Gooiland. — Leiden. — Rijzenburg, Baarn, Soestdijk. — Nijmegen. — Hulst, Walcheren.

2. *C. aurantiacus* Fr. (Ep. 455; Prodr. 362; H. 12; Fl. Bat. t. 749). Bois à aiguilles et bois à feuilles. — Août à Oct. — Bloemendaal, Heemstede. — Leiden, Westland. — Baarn, Rijzenburg. — Epe.

3. *C. umbonatus* Fr. (Ep. 457; O. I, 30). Dans les bois de sapins, parmi la mousse. [Oct. 1864, Six]. — Driebergen.

** Pileo submembranaceo, stipite tubuloso polito.

4. *C. tubaeformis* Fr. (Ep. 457; Ned. Kr. Arch. V, 333). Dans l'herbe au pied des hêtres. [Sept. 1861, Sprée]. — Baarn. — Lochem.

†† Merisma. Stipites numerosissimi in columnam elongatam coaliti vel ramosi.

††† Pleuropus. Dimidiati, stipite exacte laterali.

5. *C. muscigenus* Fr. (Ep. 460; Prodr. 362). Dans les bois, aux endroits humides, attaché aux mousses. — Août. — Haarlem.

6. *C. glaucus* Fr. (Ep. 460; H. 12). Sur les pentes sablonneuses. [6 Oct. 1363, Six]. — Rijzenburg.

†††† Resupinati. Pileus integer, primitus cupularis, vertice affixus, dein subreflexus.

* Bryophili.

7. *C. bryophilus* Fr. (Ep. 460; Prodr. Tom. II, pars 4a, p. 2). Attaché à l'*Hypnum Stokesii*. [v. d. S. Lacoste]. — Amsterdam.

8. *C. retirugus* Fr. (Ep. 460; Prodr. 362). Dans les bois, aux endroits humides, attaché aux mousses. — Août à Oct. — Westland. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

** Lignatiles.

XII. ARRHENIA.

XIII. NYCTALIS.

† Speleae. Lamellis confertis, subconcrescentibus. In cryptis.

†† Parasitae. Lamellis discretis, distantibus. In fungis putridis.

1. *N. asterophora* Fr. (Ep. 463; Ned. Kr. Arch. V, 333). Sur des Russules pourrissantes. [Oct. 1861, Sprée et Hartsen]. — Baarn, Rijzenburg. — Lochem.

XIV. MARASMIUS.

† Collybia. Pileus carnoso-lentus, demum subcoriaceus, sulcatus corrugisve, margine primo involuto. Stipes subcartilagineus, mycelio floccoso.

A. Scortei. Stipes solidus vel e medullato-farcto cavus, intus fibrosus, extus villo detersili cutem cartilagineam obtegente. Lamellae secedenti-liberae.

* Stipite basi lanato strigosove.

1. *M. urens* Fr. (Ep. 465; Prodr. 363; H. 12). Dans les bois et sur les pentes herbeuses des dunes. — Août à Oct. — Bois de Haarlem. — Baarn, Rijzenburg, de Bilt. — Domburg.

2. *M. peronatus* Fr. (Ep. 465; Prodr. 363; H. 12). Dans les bois, entre les feuilles tombées. — Sept. et Oct.— Leiden.— Baarn, Soestdijk.

** Stipite basi nudo, e fibris tortis saepe contexto.

3. *M. oreades* Fr. (Ep. 467; Prodr. 363; H. 13; Fl. Bat. t. 830). Parmi l'herbe en des lieux très divers. — Depuis le printemps jusqu'en automne. — Amsterdam, Overveen, Bentveld, Heemstede, Gooiland. — Leiden, Westland. — Utrecht, Rijzenburg, Baarn.

4. *M. plancus* Fr. (Ep. 468; O. I, 31). Entre les feuilles tombées des chênes. [12 Juill. 1864, Oudemans]. — Naarden.

B. Tergini. Stipes radicans, definite tubulosus, haud fibrosus, manifeste cartilagineus. Lamellae secedenti-liberae. Pileus quam priorum tenuior, hygrophanus, nunc laevis, nunc margine striatus.

* Stipite deorsum lanato, sursum glabro.

** Stipite ubique pruinato-velutino.

5. *M. archyropus* Fr. (Ep. 471; Prodr. 363; H. 13). Dans les bois feuillés, entre les feuilles tombées; en touffes. — Juill. à Oct. — Velsen, Bois de Haarlem. — Bois de la Haye. — de Bilt. — Apeldoorn.

C. Calopodes. Stipes curtus, arrhizus, insititius, basi tuberculoso-floccoso saepe instructus. Pileus e convexo-involuto planus depressusque; in hoc statu lamellae typice adnatae, subdecurrentes. Ad stipulas, ramos, etc. gregarii, aridi.

* Stipite sursum glaberrimo, nitido, basi simplici.

6. *M. scorodonius* Fr. (Ep. 472; Prodr. 363). Aux endroits découverts des bois, au bord des chemins, etc. — Sept. et Oct. — Leiden, Westland.

** Stipite velutino pruinatove, basi subtuberculosa.

7. *M. amadelphus* Fr. (Ep. 475; O. I, 31). Sur les branches tombées. [7 Oct. 1863, Six]. — Bois de Driebergen.

8. *M. ramealis* Fr. (Ep. 475; H. 13). Dans les bois, sur les branches tombées. [Oct. 1863, Hartsen]. — Lochem.

9. *M. candidus* Fr. (Ep. 475; H. 13). Dans les bois, sur les ramilles tombées. [Oct. 1862, Six]. — Rijzenburg, Baarn.—

†† Mycena. Stipes corneus, fistulosus, sed passim medullatus, tenax, aridus, mycelio rhizomorpheo corticato nec floccoso. Pileus submembranaceus, e campanulato-expansus, primitus recto adpresso.

A. Chordales. Stipes rigidus, radicans, vel basi dilatata adnatus. Pileus campanulatus vel convexus.

10. *M. cauticinalis* Fr. (Ep. 476; Prodr. 364). Sur des brindilles et des tiges, dans un pâturage; en groupes. — Nov. — Goes.

B. Rotulae. Stipes filiformis flaccidus basi insititius. Pileus mox planiusculus vel umbilicatus. Epiphylli.

11. *M. Rotula* Fr. (Ep. 477; Prodr. 364; H. 13). Sur les ramilles et autres débris végétaux, ainsi que sur le bois vermoulu. — Avril à Oct. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Brummen. — Zuid-Beveland.

12. *M. Graminum* Berk. (Fr. Ep. 477; Ned. Kr. Arch. V, 334). Sur les feuilles à demi pourries du *Phragmites communis*. [Oct. 1861, Sprée]. — Veenwouden.

13. *M. androsaceus* Fr. (Ep. 477; Prodr. 364; H. 13). Sur les feuilles tombées dans les bois, etc. — Avril à Oct. — Leiden. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

** Stipite velutino pilosove.

14. *M. perforans* Fr. (Ep. 478). Sur les feuilles tombées des sapin. [Août. à Oct. 1877 et 1878, Oudemans]. — Baarn. — Apeldoorn.

15. *M. saccharinus* Fr. (Ep. 479; O. I, 31). Sur les ramilles tombées. [Août 1864, van der Trappen]. — Naaldwijk.

16. *M. epiphyllus* Fr. (Ep. 479; Prodr. 365). Sur les feuilles tombées et autres débris végétaux. — Août à Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

††† Apus. Pileus sessilis resupinatus.

17. *M. spodoleucus* Berk. (Fr. Ep. 480; Prodr. Fl. Bat. tom. II, pars 4, p. 3). Sur les ramilles tombées dans les bois. [van der Trappen]. — Naaldwijk.

XV. LENTINUS.

† Mesopodes. Pileus subinteger, stipite distincto.

* Lepidei, pileo squamoso. Plus minus manifeste velati.

1. *L. tigrinus* Fr. (Ep. 481; Prodr. 365). Sur les vieux troncs d'arbres et les vieux pieux. — Juill. à Nov. — Vogelenzang (sur un pieu planté dans un fossé). — Westland. — Heumen.

2. *L. lepideus* Fr. (Ep. 481; Prodr. 365). Sur les vieux pieux, les vieilles planches, etc.; solitaire ou en groupes. — Juin à Nov. — Amsterdam. — Leiden. — Hulst.

* * Pulverulenti, pileo villoso vel pulverulento.

* * * Cochleati, pileo glabro.

3. *L. suffrutescens* Fr. (Ep. 484; H. 13). Sur du bois, dans une grange fermée depuis longtemps. [Juill. 1863, van der Mersch].

4. *L. jugis* Fr. (Ep. 484). Sur une planche pourrie de sapin rouge [Juin 1877, Oudemans]. — Amsterdam.

†† Pleuroti. Dimidiati, sessiles vel stipite sublaterali instructi.

XVI. PANUS.

* Pileo irregulari, stipite excentrico.

** Stipite definite laterali.

1. *P. stipticus* Fr. (Ep. 489; Prodr. 365; H. 13; Fl. Bat. t. 805). Sur les vieux pieux, les vieilles poutres, les vieux troncs d'arbres, etc.; en touffes. — Avril à Oct. — Overveen. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Zuid-Beveland.

*** Pileo resupinato, sessili vel postice porrecto.

XVII. XEROTUS.

XVIII. TROGIA.

XIX. SCHIZOPHYLLUM.

1. *S. commune* Grev. (Fr. Ep. 492; O, I. 31). Sur des poutres venues de l'étranger. [Nov. 1862, Oudemans]. — Amsterdam.

XX. LENZITES.

* Arborum frondosarum.

1. *L. betulina* Fr. (Ep. 493; Prodr. 366; H. 13; Fl. Bat. t. 790). Sur les souches des bouleaux et d'autres arbres. Toute l'année. — Kennemerland. — Leiden, Naaldwijk, Voorburg. — Utrecht, Rijzenburg. — Nijmegen. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

2. *L. flaccida.* (Ep. 493; Ned. Kruidk. Arch. 2e Série, III, 245). Sur une souche de chêne. [Sept. 1877, Melle J. STARING].

3. *L. variegata* FR. (Ep. 493; Prodr. 366; H. 13). Sur des souches de hêtres et d'autres arbres. [Oct. 1862, HARTSEN]. — Heemstede, Overveen.

** Arborum acerosarum.

4. *L. saepiaria* FR. (Ep. 494; Prodr. 366; Fl. Bat. t. 790). Sur du vieux bois de Conifère. — Westland.

5. *L. abietina* FR. (Ep. 495; Prodr. 366). Sur les pieux, les planches, etc., de bois de sapin. — Westland. — Utrecht.

II. POLYPOREI.

XXI. BOLETUS.

† Euchroi. Tubuli laete colorati, vulgo lutei nec albi griseive.

A. Viscipelles. Pileo pellicula viscosa obducto. Stipes solidus, haud bulbosus nec venoso-reticulatus. Tubuli postice stipiti adnati, raro sinuati, unicolores. Sporae lutescentes.

* Genuini.

1. *B. luteus* L. (FR. Ep. 497; Prod. 367; H. 13; Fl. Bat. t. 1035). Dans les bois de pins, ainsi que dans les bois des dunes; solitaire ou en groupes. — Août à Oct. — Bois de Haarlem, Bloemendaal, Overveen, Noordwijkerhout, Bergen, Schoorl. — Baarn, Soestdijk, Driebergen, Rijzenburg. — Nijmegen.

2. *B. flavus* WITHER. (Fr. Ep. 497; H. 13). Dans les bois de pins ou d'autres essences, à sol sablonneux. [Sept. 1861, HARTSEN]. — Oct. — Rijzenburg, Driebergen, Soestdijk, Baarn.

3. *B. flavidus* Fr. (Ep. 498; Prodr. 367). Aux endroits humides et marécageux des bois. — Août. — Bloemendaal. — Leiden. — Nijmegen.

4. *B. granulatus* L. (Fr. Ep. 498; Prodr. 367; H. 13; Fl. Bat. t. 1050). Dans les bois de pins et aux endroits ombragés des bruyères et des terrains sablonneux; solitaire ou en groupes. — Juin à Oct. — Overveen. — Rijzenburg. — Hulst.

5. *B. bovinus* L. (Fr. Ep. 499; H. 13). Dans les bois de pins. [Sept. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg, Baarn.

6. *B. badius* Fr. (Ep. 499; Prodr. 367; Fl. Bat. t. 804). Bois de pins et lieux sablonneux ombragés. — Juill. à Oct. — Bois de Haarlem, Heemstede, Bergen. — Naaldwijk. — Rijzenburg, Soestdijk, Baarn.

7. *B. piperatus* Bull. (Fr. Ep. 500; Prodr. 368; H. 13). Bruyères et lieux sablonneux ombragés. — Juill. à Oct. — Noordwijkerhout. — Rijzenburg, de Bilt.

** Recedentes.

8. *B. Oudemansii* Harts. (Fr. Ep. 500; H. 13; Fl. Bat. t. 936; Bot. Zeit. 1878). Bruyères et lieux sablonneux ombragés, parmi la mousse. — Juill. à Sept. [Août. 1862, de la Court]. — Zeist, Baarn. — Lochem, Apeldoorn.

B. Subtomentosi. Pileus pellicula viscida destitutus, junior villosus, raro demum glabratus. Stipes primitus exsertus, non bulbosus nec venis reticulatus, licet passim rugosus vel striatus. Caro rarius mutabilis. Tubuli unicolores, adnati.

9. *B. variegatus* Sw. (Fr. Ep. 501; Prodr. 368; H. 13). Bois de pins et endroits ombragés des bruyères et des terrains sablonneux. — Juill. à Oct. — Overveen, Noordwijkerhout — Rijzenburg, Driebergen, Baarn. — Apeldoorn.

10. *B. chrysentheron* Fr. (Ep. 502; Prodr. 368; H. 14). Lieux sablonneux ombragés, parmi l'herbe et la mousse. — Sept. et Oct. — Westland. — Baarn, Rijzenburg.

11. *B. subtomentosus* L. (Fr. Ep. 503; Prodr. 368; H. 14). Bois de pins et lieux sablonneux ombragés. — Sept. et Oct. — Santpoort, Bois de Haarlem, Vogelenzang. — Rijzenburg, Driebergen, de Bilt, Soestdijk, Baarn.

12. *B. spadiceus* Schaeff. (Fr. Ep. 503; O. I. 31). Bois de pins. [Oct. 1862, Six]. — Driebergen.

13. *B. radicans* P. (Fr. Ep. 503; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 147). Dans un taillis de chênes, au bord d'un champ de pommes de terre. [Juill. 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

14. *B. rubinus* W. Sm. (Fr. Ep. 504; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 148). Parmi l'herbe au pied de grands arbres, sur un ancien sol de bruyère. [Juill., 1877, Oudemans]. — Apeldoorn.

C. Subpruinosi. Tubuli stipiti adnati, lutescentes. Stipes aequalis, laevis, non bulbosus neque reticulatus. Pileus glaber sed saepe pruinosus.

15. *B. pruinatus* Fr. (Ep. 504; Prodr. 368; H. 13). Dans les bois, aux endroits herbeux. — Sept. et Oct. — Leiden. — Rijzenburg, Soestdijk.

16. *B. parasiticus* Bull. (Fr. Ep. 505; Arch. Neerl. I, p. 80; Fl. Bat. t. 1175). A l'ombre des bois. [Sept. 1864, van Eeden]. — Bois de Haarlem.

D. Calopodes. Stipes validus, primitus bulbosus, in typicis venoso-reticulatus. Tubuli adnati, pori non rubentes.

* Genuini. Stipes venoso-reticulatus, vulgo eleganter ruber.

17. *B. variecolor* B. Br. (Fr. Ep. 506; Ned. Kr. Arch. 2e Sér. II, 176). Bois de pins. [30 Juill. 1876, Oudemans]. — Ginneken près Breda. 1 Ex.

18. *B. calopus* Fr. (Ep. 506; Prodr. 369; H. 14). Bois à aiguilles et bois à feuilles. — Août à Oct. — Driebergen, Rijzenburg, Baarn, Soestdijk. — Nijmegen.

19. *B. pachypus* Fr. (Ep. 506; H. 14). Sous les pins et les sapins. [Sept. 1862, Hartsen]. — Gooiland. — Rijzenburg, Soestdijk.

* * Recedentes. Stipes clavatus, laevis.

E. Edules. Stratum tubulorum, poris primitus haud rubentium, circa stipitem depresso-rotundatum, subliberum. Statura valida, bulbosa. Luridorum, sed stipes (excepta specie prima) nec reticulatus punctato-squamulosusve nec ruber. Caro vix mutabilis.

20. *B. edulis* Bull. (Fr. Ep. 508; Prodr. 369; H. 14; Fl. Bat. t. 739). Bois et lieux sablonneux ombragés. — Juill. à Oct. — Bois de Haarlem, Overveen, Bloemendaal. — Noordwijkerhout, Bois de la Haye, Westland. — Rijzenburg, Baarn, Soestdijk. — Nijmegen.

21. *B. fragrans* Vitt. (Fr. Ep. 509; H. 14). Bois feuillés. [Oct. 1862, Hartsen]. — Bunnik.

22. *B. impolitus* Fr. (Ep. 509; O. I, 32). Bois de chênes. [Sept. 1863, Hartsen]. — Bunnik.

F. Luridi. Tubulorum stratum stipitem versus rotundatum et liberum, poris primitus obturatis, rubris. Pileus compactus, dein mollis, pulvinatus, carne succosa, mutabili. Stipes validus, primo curtus, bulbiformis, dein elongatus et subaequalis, subreticulatus punctatusve.

23. *B. Satanas* Lenz (Fr. Ep. 510; Prodr. 369; Fl. Bat. t. 1040). Bois de hêtres. — Juill. et Août. — Vogelenzang, Bloemendaal, Heemstede. — Noordwijkerhout. — Eemnes.

24. *B. luridus* Schaeff. (Fr. Ep. 511; Prodr. 369; H. 14; Fl. Bat. t. 899). Endroits ombragés des bruyères et des

terrains sablonneux. — Août à Oct. — Bois de Haarlem, Gooiland. — Rijzenburg. — Nijmegen.

25. *B. erythropus* P. (Fr. Ep. 511; H. 14). Dans les bois. [Sept. 1862, Six]. — Driebergen, Utrecht.

26. *B. purpureus* Fr. (Ep. 511; Prodr. 369). Lieux sablonneux ombragés, parmi l'herbe. — Juill. à Oct. — Leiden.

†† Tephroleuci. Tubuli primo albi vel grisei.

G. Favosi. Tubuli ampli, angulati, inaequales, stipiti adnati, sed circa stipitem saepe abbreviati, non vero stratum rotundato-liberum formantes. Sporae fuscae.

H. Versipelles. Tubuli minuti, rotundi, aequales, in stratum convexum, a stipite liberum stipati. Sporae ferrugineae.

27. *B. versipellis* Fr. (Ep. 515; H. 14). Dans les bois. [Août 1862, Six]. — Castricum, Santpoort. — Rijzenburg, Driebergen. — Apeldoorn.
var. *rufus* (= B. *rufus* Schaeff. et P.; Fl. Bat. t. 1140). Dans un taillis de chênes. — Santpoort [van Eeden in Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 446].

28. *B. scaber* Fr. (Ep. 515; Prodr. 369; H. 14; Fl. Bat. t. 740). Lieux herbeux ombragés, au bord des chemins et des digues, dans les bois taillis. — Juill. à Oct. — Heemstede, Bergen. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Ubbergen. — Zuid-Beveland.

I. Hyporhodii. Tubuli stipiti adnati albidi, sporis roseis dein albo-incarnati.

29. *B. felleus* Bull. (Fr. Ep. 516; Prodr. 370; H. 14; Fl. Bat. t. 740). Dans les bois de pins. — Juill. à Oct. — Bois de Haarlem. — Noordwijkerhout, Westland. — Rijzenburg, Leusden. — Nijmegen.

K. Cariosi. Stipes extus numquam reticulatus, intus medulla spongiosa farctus, demum vulgo excavatus. Tubuli primitus albi, dein saepe flaventes, poris minutis rotundis. Sporae albae.

30. *B. cyanescens* Bull. (Fr. Ep. 517; Prodr. 370; H. 14; Fl. Bat. t. 770). Endroits ombragés des bruyères et des terrains sablonneux. — Sept. — Gooiland. — Westland. — Rijzenburg. — Doesburg.

Appendix.

31. *B. hieroglyphicus* Rostk. (Fr. 521; O. I, 31). Bois de pins. [Oct. 1861, Hartsen]. — Driebergen.

XXII. FISTULINA.

1. *F. hepatica* Fr. (Ep. 522; Prodr. 382). Sur les vieux troncs de chênes, de hêtres, d'arbres fruitiers, etc. — Août à Nov. — Bloemendaal. — Bois de la Haye. — de Bilt. — Ubbergen, Rozendaal. — Goes, Domburg.

XXIII. POLYPORUS.

I. Mesopus. Pileus integer vel excentricus. Stipes distinctus, verticalis, simplex, basi concolor, nec definite nigricans.

A. Carnosi. Pileus carnosus, fragilis lentusve, azonus. Leucospori, terrestres, edules, autumnales.

* Pileo impolito, squamoso floccosove.

1. *P. subsquamosus* Fr. (Ep. 523; H. 14). Bois de pins. [Oct. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg, Zeist.

** Pileo polito, glabro.

B. Lenti. Pileus e carnoso-lento coriaceus, azonus. Leucospori, truncigeni, persistentes.

* Pileo impolito, squamoso villosove.

2. *P. brumalis* Fr. (Ep. 526; Prodr. 370). Sur le tronc et les branches des chênes, des hêtres, etc. — Avril à Oct. — Hillegom.

** Pileo laevi, glabro.

C. Spongiosi. Pileus primo spongioso-mollis, aquam bibulus, tomentosus, dein suberosus coriaceusve. Stipes curtus, difformis. Pori difformes, pruina irrorati, decolorantes, sed sporae albae.

3. *P. Schweinitzii* Fr. (Ep. 529; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 245). Dans les bois, au pied de l'*Abies excelsa* [Sept. 1877 et 78, Melle J. Staring]. — Lochem („de Velhorst").

D. Subcoriacei. Pileus primitus induratus, aridus, adultus suberosus coriaceusve. Stipes definitus. Pori primo pruina alba conspersi. Contexti color ferrugineus. Terrestres vel truncigeni.

* Pileo tomentoso, velutino.

4. *P. perennis* Fr. (Ep. 531; Prodr. 371). Aux endroits humides des terrains sablonneux et des bruyères, parmi l'herbe. — Mai à Oct. — Haarlem. — Driebergen, Baarn, Doorn. — Epe, Groesbeek. — Walcheren. — Maastricht.

** Pileo glaberrimo.

II. Pleuropus. Pileus lentus suberosusve, horizontalis, haud circinatus. Stipes simplex, adscendens, corticatus vel definite lateralis vel excentricus, basi semper niger. Lignatiles nec terrestres.

A. Lenti. Pileus carnoso-lentus, azonus. Stipes excentricus basi nigricans. Tubuli breves. Contextus pallidus, subfibrosus.

** Pileo squamoso floccosove.

5. *P. squamosus* Fr. (Ep. 532; Prodr. 371; H. 14; Fl. Bat. t. 730). Sur les vieux troncs d'arbres, les vieux pieux, etc. — Mai à Oct. — Amsterdam. — Rotterdam, Leiden. — Utrecht, Ubbergen. — Rheenen. — Zuid-Beveland, Hoek.

** Pileo laevi, glaberrimo.

6. *P. picipes* Fr. (Ep. 534; Prodr. 371). Sur les vieilles souches des saules et des frênes. — Sept. et Oct. — Leiden. — Lochem.

7. *P. varius* Fr. (Ep. 535; Prodr. 371; Fl. Bat. t. 755). Sur les vieilles souches d'arbres, les vieux pieux, etc.; ordinairement en groupes. — Juill. à Oct. — Leiden, Westland. — Nijmegen. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

8. *P. nummularius* Fr. (Ep. 536; Prodr. 372). Sur des branches de hêtre. — Oct. — Haarlem.

B. Suberoso-lignosi. Pileus crassus, durus, azonus. Stipes validus, verticalis, basi concolor. Pori elongati.

9. *P. lucidus* Fr. (Ep. 537; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 252; Fl. Bat. t. 1110). Sur une souche d'aune et sur une souche d'abricotier. [1870, Kok Ankersmit]. — Leiden. — Forêt de Beekbergen.

III. Merisma. E trunco tuberculove communi explicantur pilei numerosissimi.

A. Carnosi. Pilei carnosi, firmi, floccoso-fibrosi, azoni, non coriaceo-indurati. Caespites centrales, stipitati, e basi communi enati. Pori secedentes. Leucospori, subterrestres, autumnales.

10. *P. frondosus* Fr. (Ep. 538; Prodr. 372, H. 14). Dans les bois, sur les troncs d'arbres vermoulus. — Août à Oct. — Amsterdam. — Bois de la Haye. — Rijzenburg, Driebergen. — Lochem.

11. *P. confluens* Fr. (Ep. 539; Prodr. 372). Dans les bois de pins, sur les vieilles souches. — Août à Oct. — Leiden.— Maastricht.

B. Lenti. Pilei e carnoso-lento subcoriacei, p. m. zonati, intus fibrosi. Pori adnati. Caespites laterales, substipitati, imbricato-multiplices, stipitibus p. m. connatis vel e tubere communi enatis. Leucospori, autumnales, ad basin truncorum obvii.

12. *P. giganteus* Fr. (Ep. 540; Prodr. 372). Au pied des vieux troncs d'arbres. — Oct. — Naaldwijk.

13. *P. acanthoides* Fr. (Ep. 540; Prodr. 372). Dans les vergers, au pied des vieux troncs d'arbres. — Oct. et Nov. — Goes.

C. Caseosi. Pileus caseosus, azonus; pori secedentes. Caespites ad caudices arborum sessiles, vulgo dimidiati, primitus ex unico tuberculo amorpho in pileolos numerosos explicati. A vere per totam aestatem obvii.

14. *P. sulphureus* Fr. (Ep. 543; Prodr. 373; H. 14). Sur les vieux troncs de différentes espèces d'arbres, sur les pieux, les clôtures en bois, etc. — Avril à Oct. — Amsterdam, Bloemendaal, Berkenrode. — Leiden, Wassenaar. — Zuid-Beveland.

D. Suberosi. Pileus suberosus coriaceusve, persistens, tenax; contextus floccosus. Caespites subsessiles, e situ laterales vel centrales, sed pileoli basi attracto-liberi nec effusi. Truncigeni juxta terram.

15. *P. salignus* Fr. (Ep. 544; Prodr. 373). Au pied des vieux saules. — Avril. — Westland.

IV. Apus. Pileus sessilis. Lignatiles.

A. Anodermei. Pileus nulla cute tectus, quare superficies nuda floccoso-vel fibroso-soluta, azonus, sed intus transverse zonatus vel p. m. fibrosus. Semper annui, subcarnosi nec reviviscentes.

† Carnosi. Pileo caseoso, primo aquose molli, fragili, flocculoso nec setoso-hispido, poris albis.

* Eupolyporei. Poris rotundis, integris, obtusis, edentulis.

16. *P. tephroleucus* Fr. (Ep. 545; Prodr. 374). Dans les bois, sur le bois pourri. — Oct. — Lisière des dunes près de la Haye. — Lochem.

17. *P. pallescens* Fr. (Ep. 546; Arch. Néerl. VIII, 348). Sur des pieux. [1871, de Witt Hamer]. — Delft.

18. *P. chioneus* Fr. (Ep. 546; Prodr. 374). Sur les branches des aunes, dans les bois. — Oct. — Leiden.

** Poris elongatis, flexuosis, acutis lacerisque.

19. *P. mollis* Fr. (Ep. 547; Prodr. 374). Sur de vieux arbres à aiguilles. — Oct. — Leiden.

20. *P. destructor* Fr. (Ep. 547; Prodr. 374). Dans les bois, sur les troncs vermoulus et le bois pourri; à l'intérieur des maisons, sur les planchers et les poutres. — Mai à Oct. — Bois de la Haye.

†† Lenti. Pileo carnoso-lento, molli, elastico, ob contextum fibroso-floccosum villoso-tomentoso; poris subadnatis coloratis. Semper molles, subflexiles, in sequens ver persistentes.

* Contextu colorato.

21. *P. croceus* Fr. (Ep. 548; Prodr. 374). Sur les vieux troncs de chênes et sur le bois de chêne en pourriture. — Oct. — Westland.

22. *P. nidulans* Fr. (Ep. 548; Prodr. 575). Sur les vieilles souches de différents arbres. — Août à Oct. — Leiden. — Lochem.

** Contextu albo.

23. *P. albus* Fr. (Ep. 549; Ned. Kr. Arch. 2e Série, II, 97). Sur un tronc vermoulu. [1871, van Ledden Hulsebosch].— Culemborg.

24. *P. fumosus* Fr. (Ep. 549; Prodr. 375; H. 14). Sur les vieilles souches d'arbres. — Oct. — Amsterdam. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht, Rijzenburg.

25. *P. adustus* Fr. (Ep. 549; Prodr. 375). Sur les vieux pieux et les vieilles souches d'arbres. — Juin à Oct. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

26. *P. kymathodes* Rostk. (Ep. 550; Prodr. 375). Sur un tronc de pin en pourriture. — Nov. — Zwake.

27. *P. amorphus* Fr. (Ep. 550; H. 14; O. I, 32). Sur les vieilles souches de pins. [Août. 1866, Oudemans]. — Driebergen, Rijzenburg.

††† Spongiosi. Vegeti udi et spongiosi, saepius setoso-hispidi, intus fibrosi. Caro vulgo offert stratum intermedium, exteriore magis compactum. Firmi sed annui, autumnales, optimi in truncis vivis.

* Contextu colorato.

28. *P. hispidus* Fr. (Ep. 551; Prodr. 375). Sur les vieilles souches de différentes espèces d'arbres. — Mai à Oct. — Leiden, Westland.

29. *P. cuticularis* Fr. (Ep. 551; H. 14). Sur les souches des chênes et des hêtres. [Sept. 1860, Hartsen]. — Bloemendaal. — Rijzenburg.

** Contextu et sporis albis.

30. *P. Weinmanni* Fr. (Ep. 552; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 246). Sur une planche de sapin blanc. [Sept. 1878, Melle J. Staring]. — Lochem.

31. *P. borealis* Fr. (Ep. 552; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 246). Sur des branches de sapin. [Sept. 1877; Melle J. Staring]. — Lochem.

32. *P. pubescens* Fr. (Ep. 553; H. 14). Sur des troncs de bouleaux. [Sept. 1861, Hartsen]. — Rijzenburg.

B. Placodermei. Pileus crusta contigua vestitus, azonus vel concentrice sulcatus. Persistentes.

†††† Suberosi. Pileo primitus subcarnoso succoso, dein indurato, crusta tenuiore tecto; poris tenuibus, demum subsecedentibus. Autumnales.

* Contextu colorato.

33. *P. resinosus* Fr. (Ep. 554; Ned. Kr. Arch. 2e Serie, III, 247). Sous un sapin. [17 Oct. 1878, Oudemans]. — Baarn.

** Contextu haud zonato, sporisque albis.

34. *P. betulinus* Fr. (Ep. 555; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 248). Sur des troncs de bouleaux. [Sept. 1877, Melle J. Staring]. — Lochem.

††††† Fomentarii. Pileo floccoso-fomentario, exsucco, crusta dura cornea tecto, poris demum stratosis. Lignosi, subpulvinati, perennes, quotannis nova strata addentes.

* Contextu porisque umbrinis fuscisve.

** Contextu porisque subferrugineis.

35. *P. fomentarius* Fr. (Ep. 558; Prod. 376; H. 14). Dans les bois, sur les vieux hêtres et les vieux bouleaux. — Mai à Oct. — Amsterdam, Bloemendaal. — Bois de la Haye, Westland.

36. *P. nigricans* Fr. (Ep. 558; Prodr. 376). Sur les vieilles souches des bouleaux et des saules. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

37. *P. igniarius* Fr. (Ep. 559; Prodr. 376; P. 14; Fl. Bat. t. 744). Sur les troncs de différentes espèces d'arbres. — Mai à Oct. — Bois de Haarlem, Vogelenzang. — Leiden (sub titulo *P. fulvi*), Wassenaar, Westland. — Nijmegen. — Zuid-Beveland (partim sub titulo *P. fulvi*).

38. *P. conchatus* Fr. (Ep 560; Prodr. 377). Sur les saules, les hêtres et autres arbres. — Sept. et Oct. — Westland.

39. *P. Ribis* Fr. (Ep. 560; Prodr. 377; Fl. Bat. t. 745). Au pied des vieux buissons de groseilliers. — Sept. et Oct. — Westland. — Nijmegen. — Zuid-Beveland.

40. *P. salicinus* Fr. (Ep. 561; Prodr. 377). A la surface et à l'intérieur des troncs vermoulus des saules. — Sept. et Oct. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Kampen. — Zuid-Beveland.

* * * Contextu albo vel pallido.

41. *P. marginatus* Fr. (Ep. 561; Prodr. 377; Fl. Bat. t. 1110). Sur le tronc des hêtres, ainsi que sur les vieux pieux et les vieilles poutres. — Sept. et Oct. — Westland.

42. *P. connatus* Fr. (Ep. 563; O. I, 32). Sur une vieille souche d'arbre. [Oct. 1864, Six]. — Driebergen.

†††††† Lignosi. Pileo primitus duro, lignoso, crusta tenui, subvernicea, glabra vel glabrescente tecto, basi subeffuso; poris non stratosis. Perennantes sed non stratosi.

43. *P. annosus* Fr. (Ep. 564; O. I, 32). Sur des racines de pins. [Oct. 1864, Six]. — Driebergen.

44. *P. populinus* Fr. (Ep. 564; Ned. Kr. Arch., 2e Série, I, 447). Sur une souche de peuplier [van Eeden]. — Haarlem.

45. *P. Neesii* Fr. (Ep. 564; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 249). Sur un fragment de branche vermoulu. [Sept. 1877, Melle J. Staring]. — Lochem.

C. Inodermei. Pileus primitus aridus et firmus, cuticula tenui, fibrosa. Fungi annui vel biennes, non reviviscentes.

††††††† Stupposi. Pileo e flocculoso glabrato adpresseve villoso, inaequabili, azono, contextu fibroso.

* Contextu colorato.

46. *P. cryptarum* Fr. (Ep. 566; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Sur une planche vermoulue de sapin rouge. [Août 1871, van der Trappen]. — 's Gravezande.

** Contextu albo.

47. *P. Fibula* Fr. (Ep. 567; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 249). Sur des branches tombées. [Bondam]. — Kampen.

†††††††† Coriacei. Pileo coriaceo, villoso, zonis concentricis, vulgo discoloribus fasciato.

48. *P. hirsutus* Fr. (Ep. 567; O. I, 32). Sur des branches d'aune. [Sept. 1864, van der Trappen]. — Naaldwijk.

49. *P. velutinus* Fr. (Ep. 568; Prodr. 378). Sur de vieux troncs d'arbres et sur les planches d'une bache. — Avril à Oct. — Amsterdam. — Leiden.

50. *P. zonatus* Fr. (Ep. 568; Prodr. 378). Sur de vieux troncs d'arbres. — Sept. à Nov. — Leiden, Naaldwijk.

51. *P. versicolor* Fr. (Ep. 568; Prodr. 378; H. 14). Sur les vieux troncs d'arbres, les pieux, etc. — Avril à Nov. — Amsterdam, Haarlem, Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Rijzenburg. — Nijmegen. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

var. *albus*. Naaldwijk.

52. *P. abietinus* Fr. (Ep. 569; Prodr. 378). Sur des chicots de sapin et sur des pieux du même bois. — Juill. — Leiden. — Zutphen.

V. Resupinati. Pileus nullus, quare fungus absolute resupinatus. Pori ligno myceliove, nullo subiculo interjecto, immediate impositi.

* Poris fuscis nigricantibusve.

53. *P. subspadiceus* Fr. (Ep. 570; Prodr. 378). Sur des troncs et des pieux de chêne. — Oct. — Amsterdam.

** Poris ferrugineis cinnamomeisve.

54. *P. ferruginosus* Fr. (Ep. 571; Prodr. 379). Sur le bois d'aune exposé à l'humidité. — Sept. et Oct. — Bloemendaal. — Leiden. — Zuid-Beveland.

55. *P. contiguus* Fr. (Ep. 571; Prodr. 379). Sur les vieux pieux, les vieilles clôtures, etc., ainsi que sur les arbres. — Sept. et Oct. — Leiden.

*** Poris purpureis violaceisve.

56. *P. violaceus* Fr. (Ep. 572; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 148). Sur des branches de pin. [1835, Junghuhn]. — Harderwijk.

57. *P. purpureus* Fr. (Ep. 572; Prodr. 379). Sur du bois pourri de hêtre. — Sept. et Oct. — Leiden.

**** Poris rubris.

58. *P. makraulos* Rostk. (Fr. Ep. 573; O. I, 32). Sur des racines de pin. [Oct. 1863, Six]. — Driebergen.

***** Poris lutescentibus.

****** Poris ex albo decolorantibus.

******* Poris persistenter albis, minutis, stipatis, in situ plano rotundis, aequalibus.

59. *P. Medulla panis* Fr. (Ep. 576; Prodr. 379; H. 14). Sur le bois exposé à l'humidité, les clôtures, les pieux, les poutres, etc. — Sept. et Oct. — Naarden. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Breda. — Zuid-Beveland.

60. *P. mucidus* Fr. (Ep. 577; Prodr. 379). Sur le bois pourrissant de chêne et de sapin. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

61. *P. obducens* P. (Fr. Ep. 577; Prodr. 379). Sur le bois vermoulu des souches de saule, des palissades, des ponts etc. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

******** Poris persistenter albis, inaequalibus, angulatis, contiguis, vulgo majusculis.

62. *P. sanguinolentus* Fr. (Ep. 598; O. I, 32). Sur des troncs morts de *Cycas*. [Sept. 1861, Oudemans]. — Jardin bot. d'Amsterdam.

63. *P. Radula* Fr. (Ep. 598; Prodr. 379). Sur le vieux bois exposé à l'humidité. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

64. *P. vaporarius* Fr. (Ep. 599; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Sur des planches de sapin. [Oct. 1871, van der Trappen]. — Naaldwijk.

65. *P. hibernicus* R. Br. (Fr. Ep. 599). Sur des branches de pin. [Oct. 1878, Oudemans]. — Amsterdam.

66. *P. Vaillantii* Fr. (Ep. 599; O. I, 32). Sur des planches pourries de sapin. [Sept. 1861, Oudemans]. — Amsterdam (à la face inférieure du plancher pourri de la serre à palmiers).

********* Poris albis, superficialibus, distantibus, punctiformibus.

67. *P. corticola* Fr. (Ep. 580; Prodr. 379). Sur l'écorce de vieilles poutres. — Leiden.

XXIV. TRAMETES.

† Apodes. Pileo dimidiato, sessili.

* Contextu colorato.

1. *T. protracta* Fr. (Ep. 583; O. I, 32). Sur des poutres. [Sept. 1863, Hartsen]. — Utrecht.

** Contextu albo.

2. *T. gibbosa* Fr. (Ep. 583; Prodr. 380). Sur les vieux troncs de différentes espèces d'arbres. — Sept. et Oct. — Leiden.
3. *T. suaveolens* Fr. (Ep. 584; Prodr. 380; H. 14; Fl. Bat. t. 800). A la surface et à l'intérieur de vieilles souches creuses des saules. — Avril à Nov. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Nijmegen. — Bois-le-Duc. — Zuid-Beveland.

†† Resupinati. Pileo resupinato.

XXV. DAEDALEA.

* Suberoso-lignosae, dimidiatae, sessiles.

1. *D. quercina* P. (Fr. Ep. 586; Prodr. 380; H. 14; Fl. Bat. t. 789). Sur les vieux troncs de chênes. — Mai à Nov. — Vogelenzang, Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland. — Maastricht.
2. *D. confragosa* P. (Fr. Ep. 587; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 249). Sur un tronc de hêtre. [10 Oct. 1878, Oudemans]. — Bois de Baarn.

* * Coriaceae, dimidiatae, sessiles.

3. *D. unicolor* Fr. (Ep. 588; Prodr. 381; H. 14). Sur les vieux troncs de différentes espèces d'arbres feuillés. — Sept. et Oct. — Amsterdam. — Leiden. — Rijzenburg.

4. *D. Oudemansii* Fr. (Ep. 588; O. I, 33). Sur une branche de pin. [Sept. 1864; Six]. — Driebergen.

* * * Resupinatae.

XXVI. HEXAGONA.

XXVII. FAVOLUS.

XXVIII. MERULIUS.

† Leptospori. Hymenium nudum vel sporis albis obsolete pruinosum.

* Pileo effuso-reflexo, ambitu determinato.

1. *M. tremellosus* Schrad. (Fr. Ep. 591; Prodr. 381). Sur les vieilles poutres, les vieilles palissades, et les vieilles souches de différentes espèces d'arbres. — Juill. à Nov. — Amsterdam. — Leiden. — Zuid-Beveland.

2. *M. Corium* Fr. (Ep. 591; Prodr. 381). Sur le bois pourrissant et sur les troncs d'arbres vermoulus. — Amsterdam. — Westland.

* * Resupinato-effusi, byssino-membranacei, secedentes, subtus et ambitu byssini.

3. *M. molluscus* Fr. (Ep. 592; Arch. Néerl. VIII, 349). Sur du bois de sapin en pourriture. [Déc. 1873, van der Trappen]. — Naaldwijk.

* * * Crustoso-adnati, ambitu subbyssini.

4. *M. serpens* Tode. (Fr. Ep. 593; Prodr. 381). Sur du bois de sapin en pourriture. — Leiden.

†† Coniophori. Hymenium sporis ferrugineis pulverulentum. Omnes destruentes.

5. *M. lacrymans* Fr. (Ep. 594; Prodr. 381; Fl. Bat. t. 760). Sur le bois pourrissant dans des endroits humides, surtout à l'intérieur des maisons, sous les planchers, etc. — En Mai et plus tard. — Haarlem, Overveen. — Rotterdam, Westland. — Nijmegen. -- Goes.

6. *M. pulverulentus* Fr. (Ep. 594; Prodr. 381). Sur le bois pourrissant. — Amsterdam. — Leiden.

XXIX. POROTHELIUM.

XXX. SOLENIA.

1. *S. candida* P. (Fr. Ep. 596; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 148). Sur du bois de saule en pourriture. [1842, van der Sande Lacoste]. — Zuijlen.

2. *S. anomala* Fr. (Ep. 596; Prodr. 402 sub Peziza). Sur le bois pourrissant. — Mai à Oct. — Leiden, Naaldwijk.

III. **HYDNEI.**

XXXI. HYDNUM.

A. Mesopus. Integra, simplicia, stipite centrali. Omnes species terrestres.

† Carnosa. Pileus carnosus, subfragilis.

* Aculeis decolorantibus, pileo squamoso vel tomentoso.

1. *H. imbricatum* L. (Fr. Ep. 598; Ep. 382; H. 15). Dans les bois à aiguilles; en groupes et formant de petites touffes. Sept. et Oct. — Rijzenburg. — Epe, Enghuizen. — Beek en Gueldre.

2. *H. squamosum* SCHAEFF. (Fr. Ep. 598; Arch. Néerl. VIII, 349). Sous des sapins, sur un sol sablonneux. [Août. 1872, OUDEMANS]. — Soestdijk.

3. *H. subsquamosum* SCHAEFF. (Fr. Ep. 598; Ned. Kr. Arch. V, 334). Bois à aiguilles. [Oct. 1849, BUSE]. — Renkom.

** Aculeis decolorantibus, pileo laevi glabro.

4. *H. laevigatum* SW. (Fr. Ep. 599; Ned. Kr. Arch. V, 334). Bois à aiguilles. [Oct. 1849, BUSE]. — Renkom.

*** Aculeis immutabilibus, unicoloribus, albidis.

5. *H. repandum* L. (Fr. Ep. 601; H. 15). Bois à aiguilles et bois à feuilles. [Oct. 1861, HARTSEN]. — Rijzenburg, Baarn.

6. *H. rufescens* P. (Fr. Ep. 601; Prodr. 382). Bois à aiguilles. — Oct. — Amerongen.

†† Lignosa. Pileus suberosus coriaceusve, tenax.

* Aculeis decolorantibus sporisque subfuscis.

7. *H. compactum* P. (Fr. Ep. 603; H. 15). Bois à aiguilles. [Oct. 1861, HARTSEN]. Rijzenburg. — Lochem.

8. *H. aurantiacum* A. S. (Fr. Ep. 603; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 249). Bois à aiguilles. [Sept. 1877, Melle J. STARING].— Lochem.

9. *H. ferrugineum* FR. (Ep. 603; Prodr. 382; H. 15). Bois à aiguilles. — Sept. et Oct. — Baarn, Rijzenburg. — Enghuizen.

** Aculeis decolorantibus sporisque ferruginascentibus.

10. *H. cinereum* BULL. (Fr. Ep. 604; H. 15). Bois à aiguilles. [Août. 1862, Mme VAN ESS REEVINK]. — Lochem.

11. *H. zonatum* BATSCH (Fr. Ep. 605; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Lieux sablonneux ombragés. [Oct. 1870, OUDEMANS]. — Bloemendaal.

12. *H. Queletii* FR. (Ep. 605; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 250). Bois à aiguilles. [Août. 1872, OUDEMANS]. — Soestdijk.

*** Aculeis immutabilibus et sporis albidis.

13. *H. nigrum* FR. (Ep. 605; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 250). Bois à aiguilles. [Août. 1878, Melle J. STARING]. — Lochem.

14. *H. graveolens* DEL. (Fr. Ep. 605; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Bois à aiguilles. [Oct. 1862, HARTSEN]. — Baarn. — Lochem.

15. *H. melaleucum* FR. (Ep. 606; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Bois à aiguilles. [Oct. 1871, R. BONDAM]. — Baarn. — Harderwijk, Lochem.

16. *H. cyathiforme* SCHAEFF. (Fr. Ep. 606; Prodr. 382 (sub H. tomentoso). Bois à aiguilles. — Sept. et Oct. — Rijzenburg. — Baarn. — Enghuizen, Lochem.

B. Pleuropus. Subdimidiati, stipite laterali.

17. *H. Auriscalpium* L. (Fr. Ep. 607; Prodr. 382; H. 15; Fl. Bat. t. 1170). Sur les cônes pourrissants du Pinus sylvestris dans les bois de pins. — Avril, Sept. et Oct. — Bloemendaal, Overveen, Heemstede, Naarden. — Leiden, Rijzenburg.

C. Merisma. Ramosissima vel tuberculiformia vel immarginata.

* Ramosissima.

** Simplicia, tuberculiformia, immarginata.

D. Apus. Pileus sessilis, dimidiatus, marginatus, saepe effuso-reflexus.

* Pileo carnoso, molli.

** Caespitosa, pileis imbricatis, vulgo lentis, tenacibus.

*** Simplicia, pileo coriaceo vel suberoso.

**** Pileo membranaceo.

E. Resupinati. Pileus nullus.

* Aculeis fuscis, ferrugineis.

** Aculeis lutescentibus, viridibus.

18. *H. viride* Fr. (Ep. 614; Ned. Kr. Arch. V, 334). Sur du bois pourri d'aune. [Oct. 1861, Sprée]. — Lochem.

*** Aculeis carneis, lilacinis, rufescentibus.

**** Aculeis albis vel senio flavidis.

19. *H. farinaceum* P. (Fr. Ep. 616; Prodr. 382). Sur du bois pourrissant de pin. — Westland.

20. *H. argutum* Fr. (Ep. 616; Prodr. 383). Dans des souches creuses de saules. — Zuid-Beveland.

XXXII. HERICIUM.

XXXIII. TREMELLODON.

XXXIV. SISTOTREMA.

1. *S. confluens* Fr. (Ep. 619; Arch. Néerl. VIII, 350). Sur une pelouse où abondait le *Trifolium repens*. [Août. 1870, van der Trappen]. — Naaldwijk.
2. *S. carneum* Bon. (Fr. Ep. 619; Arch. Néerl. VIII, 350; Fl. Bat. t. 1095). Comme le précédent. — Naaldwijk.
3. *S. menbranaceum* Oud. (Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 250). Sur des mousses et des feuilles pourrissantes au pied de sapins. [17 Oct. 1878, Oudemans].

XXXV. IRPEX.

* Stipitatus.

** Pileo postice porrecto pendulus.

*** Sessiles vel effuso-reflexi, marginati.

1. *I. fusco-violaceus* Fr. (Ep. 620; O. I, 33; H. 14). Sur des chicots de pins. [Oct. 1863, Hartsen]. — Driebergen. — de Steeg.

**** Resupinati.

2. *I. obliquus* Fr. (Ep. 622; Prodr. 383). Sur des branches mortes de chêne, de hêtre, etc. — Mai à Oct. — Leiden.

3. *I. candidus* WEINM. (Fr. Ep. 622; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 251). Sur des branches tombées et des éclats de bois. [Sept. 1878, Melle J. STARING]. — Lochem.

XXXVI. RADULUM.

* Denudata, maxime varia.

1. *R. quercinum* FR. (Ep. 623; Prodr. 383). Sur du vieux bois de chêne. — Avril. — Westland.

** Innata, decorticantia.

2. *R. laetum* FR. (Ep. 624; Ned. Kr. Arch. 2e Sér. III, 251). — Harderwijk [JUNGHUHN in Herb. Soc. Bot].

XXXVII. PHLEBIA.

1. *P. radiata* FR. (Ep. 625). Sur des écorces pourries. [1835, JUNGHUHN]. — Harderwijk.
2. *P. vaga* FR. (Ep. 625; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 165). Sur du bois pourri de pin (à savoir, sur des pilotis, en-dessous de l'écorce détruite par la pourriture). [Déc. 1871, OUDEMANS]. — Amsterdam.

XXXVIII. GRANDINIA.

XXXIX. ODONTIA.

XL. KNEIFFIA.

XLI. ODONTELLA.

IV. THELEPHOREI.

XLII CRATERELLUS.

* Tubaeformes, ad basin spipitis pervii.

1. *C. cornucopioides* P. (Fr. Ep. 631; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 251). Sous des arbres de futaie. (Dans l'herbier de la Société botanique Néerlandaise). [Août 1845, L. A. Perein]. — Leiden.

** Infundibuliformes, stipite farcto.

2. *C. sinuosus* Fr. (Ep. 631; Ned. Kr. Arch. V, 335). Bois à essences mêlées. [Août. à Oct. 1861, Spréé]. — Lochem.

*** Deformes, pileo stipiteque carnosis.

XLIII. THELEPHORA.

* Erectae, pileo integro vel ramoso-partito.

1. *T. Sowerbeji* R. Br. (= T. pannosa Fr.) (Fr. Ep. 633; Prodr. 383). Bois de hêtres, sur la terre; en touffes. — Oct. — Maastricht.
2. *T. radiata* Fr. (Ep. 633; O. I, 33). Bois de pins. [Sept. 1864, Six]. — Driebergen.
3. *T. caryophyllea* P. (Fr. Ep. 634; Prodr. 383). Aux endroits humides et ombragés des bruyères et des terrains sablonneux, ainsi que dans les dépressions des dunes; en groupes. — Oct. — Velsen, Bloemendaal, Overveen, Heemstede. — Wassenaar. — Maastricht.
4. *T. palmata* Fr. (Ep. 634; Ned. Kr. Arch. V, 335). Dans les bois. [Déc. 1839, Buse]. — Bois de Bloemendaal.
5. *T. diffusa* Fr. (Ep. 635; Ned. Kr. Arch. 2e Série, III, 251). Lieux sablonneux humides. [Août 1878, Melle J. Staring]. — Lochem.

** Pileatae, dimidiatae, horizontales, subsessiles vel effuso-reflexae.

6. *T. terrestris* EHRH. (Fr. Ep. 635; Prodr. 384). Sur la terre et sur les souches d'arbres vermoulues. — Sept. et Oct. — Leiden.

7. *T. laciniata* P. (Fr. Ep. 636; H. 15; Fl. Bat. t. 750 sub T. terrestri). Sur la terre et sur les souches d'arbres vermoulues. [Rijzenburg, Oct. 1861, HARTSEN]. — Sept. et Oct. — Leiden, Westland. — Rijzenburg, Baarn, Doorn.

*** Resupinatae, utplurimum incrustantes, unde forma variantes.

8. *T. cristata* FR. (Ep. 637; Ned. Kr. Arch. V. 335). Sur la mousse, l'herbe, les feuilles, etc., dans les bois. [Oct. 1861, SPRÉE]. — Lochem.

XLIV. STEREUM.

† Merisma. Pilei numerosissimi, adscendentes, in caespitem liberum imbricati.

†† Apus. Pileus sessilis, primo resupinatus, dein vulgo pileato-reflexus, vel postice adnatus, coriaceus; marginatus.

* Hymenio glabro.

1. *S. ochroleucum* FR. (Ep. 639; Prodr. 385 sub *Corticio*). Sur les vieilles souches d'arbres. — Leiden.

2. *S. purpureum* P. (Fr. Ep. 639; Prodr. 384; H. 15). Sur le bois vermoulu des souches d'arbres, des palissades, des poutres, etc.; en groupes. — Au printemps et en automne. — Amsterdam, Bloemendaal, Overveen. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Nijmegen. — Zuid-Beveland.

3. *S. hirsutum* Fr. (Ep. 639; Prodr. 384; H. 15). Sur le bois vermoulu des souches d'arbres, des palissades, des poutres, etc.; en groupes. — Avril à Nov. — Amsterdam, Overveen. — Leiden, Westland. — Utrecht, Rijzenburg.— Lochem. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

4. *S. spadiceum* Fr. (Ep. 640; O. I, 33). Sur le tronc des chênes. [Oct. 1863, Hartsen sub titulo erroneo *S. tabacini*]. — Amsterdam. — Utrecht. — Lochem.

5. *S. sanguinolentum* Fr. (Ep. 640; O. I, 33). Sur des branches de pin tressées en corbeilles à Orchidées. [Oct. 1863, Oudemans]. — Amsterdam.

** Hymenio simplici, setuloso vel velutino.

6. *S. rubiginosum* Fr. (Ep. 641; Prodr. 384). Sur de vieux revêtements en bois de chêne et sur les vieilles souches de chênes. — Westland. — Bois de Soeren. — Goes. — Maastricht.

7. *S. tabacinum* Fr. (Ep. 641; Prodr. 384). Sur les troncs d'arbres feuillés. — Mai à Nov. — Naaldwijk (voir O. I, 33 sub *Thelephora ferruginea*). — Lochem. — Maastricht.

8. *S. disciforme* Fr. (Ep. 642; Prodr. 385). Sur le tronc des chênes. — Sept. et Oct. (Fréquemment confondu avec d'autres espèces. Rare dans notre pays). — Leiden.

*** Lignosa, perennia, vix reflexa, sed marginata, hymenio confluenti-stratoso, primitus pruinoso.

9. *S. frustulosum* Fr. (Ep. 643; Prodr. 385). Sur les vieilles souches des chênes et des frênes. — Mai à Nov. — Ubbergen, Arnhem.

**** Rigida, hymenio simplici pruinoso.

10. *S. rugosum* Fr. (Ep. 643; Prodr. 385). Sur les vieilles souches des aunes et des noisetiers; en groupes. — Sept. et Oct. — Zuid-Beveland.

11. *S. Pini* Fr. (Ep. 643; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 448). Sur l'écorce du *Pinus sylvestris.* [van Eeden]. — Vogelenzang.

††† Resupinata. Crustaceo-adnata, indeterminata, absque pileo distincto, sed demum corii instar integra solvenda. Ambitus non byssinus.

* Genuina, coriacea.

** Imperfecta, crustaceo-adnata, sterilia.

XLV. AURICULARIA.

1. *A. mesenterica* Fr. (Ep. 646; Prodr. 391). Sur les vieux troncs d'arbres, surtout sur ceux des chênes. — Mai à Nov. — Leiden. — Zuid-Beveland.

2. *A. sambucina* Mart. (= *Hirneola Auricula Judae* Berk. in Fr. Ep. 695; Prodr. 391). Sur les vieilles souches de sureaux. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.

XLVI. CORTICIUM.

† Lomatia. Resupinata, sed ambitu libera, determinata, marginata, vulgo e cupulari expansa.

†† Himantiae. Resupinata, effusa, immarginata, ambitu subtusque byssino-fibrillosa vel strigoso-pilosa.

* Mycelio ambituque albis.

NB. *C. ochroleucum* du Prodr. a été transporté au genre *Stereum*, et *C. evolvens* n'a pas été trouvé chez nous. Les exemplaires qui figurent sous ce nom dans l'herbier de la Soc. bot. Néerl. appartiennent au *St. purpureum.*

1. *C. giganteum* Fr. (Ep. 648; Prodr. 385). Au pied des vieux troncs d'arbres et sur les aiguilles tombées dans les bois de conifères. — Leiden.

2. *C. lacteum* Fr. (Ep. 649; Prodr. 386). Sur le bois mort et pourrissant et sur les branches tombées. — Amsterdam. — Leiden, Westland.

3. *C. radiosum* (Fr. Ep. 649; Prodr. 386). Sur le bois pourrissant. — Leiden (Les échantillons de l'herbier de la Soc. bot. Néerl. appartiennent tous au *C. laeve* P.)

4. *C. laeve* P. (Fr. Ep. 649; Prodr. 386). Sur le bois pourissant. — Bloemendaal. — Leiden, Westland. — Maastricht.

** Mycelio ambituque coloratis.

5. *C. cinnamomeum* Fr. (Ep. 650; Ned. Kr. Arch. V, 335). Sur l'écorce de l'aune. [Août 1861, Sprée]. — Lochem.

6. *C. coeruleum* Fr. (Ep. 651; Prodr. 386). Sur le bois pourrissant. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

†† Lejostroma. Adglutinata, absque ambitu strigoso vel fibrilloso.

* Ceracea, fertilia terram spectantia, uniformia, sicca rimosa.

7. *C. calceum* Fr. (Ep. 652; Prodr. 386). Sur les vieux pieux et les vieilles planches. — Leiden.

8. *C. lividum* P. (Fr. Ep. 652; O. I, 34). Sur les vieux troncs d'arbres. [Oct. 1864, van der Trappen].

** Amphigena, rigescentia, ambitu primitus tenuissime floccoso-radiante, mox nudo.

9. *C. quercinum* Fr. (Ep. 653; Prodr. 386). Sur les branches et les troncs pourrissants des chênes. — Amsterdam. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

10. *C. cinereum* Fr. (Ep. 654; Prodr. 386). Sur le vieux bois et les vieilles écorces des arbres feuillés. — Amsterdam. — Leiden.

11. *C. incarnatum* Fr. (Ep. 654; Prodr. 386). Sur le bois vermoulu des saules et des peupliers. — Amsterdam. — Naaldwijk.

*** Amphigena, jam primitus indurata, subgrumosa, ambitu semper nudo.

12. *C. polygonium* P. (Fr. Ep. 655; Prodr. 387). Sur des branches de peupliers. — Leiden. — Zuid-Beveland.

**** Amphigena, tenuissima, innata, decorticantia.

13. *C. comedens* Fr. (Ep. 656; O. I, 34). Sur des branches pourrissantes. [Nov. 1865; van der Trappen]. — Naaldwijk.

***** Species minus cognitae.

14. *C. Typhae* Fuck. (Fr. Ep. 657; Ned. Kr. Arch. V, 335). Sur des *Carex*. [Août. 1861, Sprée]. — Lochem.

Subgenus I. Coniophora. Fungi carnosi, undulato-tuberculosi, raro membranacei, laevigati; hymenio glabro, sporis pulverulento; reliqua Corticii. Lignatiles.

Subgenus II. Hypochnus. Corticia floccoso-collabentia vel hymenio tomentoso, subpulverulento praedita.

* Floccoso-collabentia.

15. *C. Sambuci* Fr. (Ep. 660; O. I, 34). Sur le tronc mort du sureau. [Août. 1865, Oudemans]. — Amsterdam. — Rotterdam, Naaldwijk.

** Hymenio tomentoso subpulverulento.

XLVII. CYPHELLA.

* Lignicolae.

1. *C. ampla* Lév. (Fr. Ep. 662; Prodr. II, pars 4, p. 3; Fl. Bat. t. 1074). Sur les branches tombées. — Mai à Nov. — Amsterdam, Overveen, Bloemendaal. — Brummen.
2. *C. fulva* B. Br. (Fr. Ep. 662; Ned. Kr. Arch. 2e Série, II, 99). Sur des écorces d'arbres. [Bondam]. — Harderwijk.

** Muscicolae.

3. *C. muscigena* Fr. (Ep. 663; Prodr. 387). Dans les pâturages et les lieux ombragés, sur la mousse; en groupes. — Oct. et Nov. — Haarlem. — Zuid-Beveland.
4. *C. galeata* Fr. (Ep. 663; Ned. Kr. Arch. V, 335). Sur la mousse. [Janv. 1869, van Eeden]. — Overveen.
5. *C. muscicola* Fr. (Ep. 663; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 448). Sur la mousse. [Janv. 1869, van Eeden]. — Dunes près Overveen.

*** Stipiticolae.

6. *C. laeta* Fr. (Ep. 664; O. I, 34). Sur des tiges pourrissantes de plantes annuelles. [Oct. 1865, van der Trappen]. — Naaldwijk.
7. *C. capula* Fr. (Ep. 664; Prodr. 387). Sur des tiges sèches de plantes herbacées, dans des lieux ombragés; en groupes. — Oct. — Zuid-Beveland.

**** Caulicolae et epiphyllae.

V. CLAVARIEI.

XLVIII. SPARASSIS.

XLIX. CLAVARIA.

† Ramaria. Ramosae, ramis sursum attenuatis.

A. Leucosporae.

* Colore laeto, luteo, rubro vel violaceo. Terrestres.

1. *C. Botrytis* P. (Fr. Ep. 667; Prodr. 387). Dans les bois et dans les lieux sablonneux ombragés. — Mai. — Ubbergen.
2. *C. amethystina* Bull. (Fr. Ep. 667; Prodr. 388). Parmi la mousse ou l'herbe, dans les bois. — Sept. et Oct. — Utrecht.
3. *C. fastigiata* Bull. (Fr. Ep. 667; Prodr. 388; Fl. Bat. t. 814). Sur les gazons à sol sablonneux. — Sept. et Oct. — Naaldwijk.
4. *C. muscoides* L. (Fr. Ep. 667; Prodr. 388). Sur les gazons à sol sablonneux. — Oct. et Nov. — Overveen, Santpoort. — Leiden, Westland. — Zuid-Beveland.

** Colore albo griseove. Terrestres.

5. *C. coralloides* L. (Fr. Ep. 668; Prodr. 388; Fl. Bat. t. 1115). Dans les bois, aux endroits humides. — Sept. et Oct. — Overveen. — Leiden.
6. *C. cinerea* Bull. (Fr. Ep. 668; Prodr. 388). Lieux herbeux humides. — Sept. et Oct. — Leiden.

7. *C. cristata* P. (Fl. Ep. 668; Prodr. 388). Bois et lieux sablonneux ombragés. — Sept. à Nov. — Aardenhout, Santpoort. — Leiden. — Brummen, Lochem. — Zuid-Beveland.

8. *rugosa* Bull. (Fr. Ep. 669; Prodr. 388). Lieux herbeux humides. — Sept. et Oct. — Dunes de Haarlem, Overveen. — Leiden. — Epe, Lochem.

9. *C. Krombholzii* Fr. (Ep. 669; Prodr. 388). Dans les bois. — Leiden.

10. *C. Kunzei* Fr. (Ep. 669; Prodr. 388). Dans les bois. — Sept. et Oct. — Leiden.

* * * Colore albido vel sordido. Epixylae.

11. *C. pyxidata* P. (Fr. Ep. 669; Prodr. 389). Sur les souches d'arbres vermoulues et sur le bois pourrissant. — Sept. et Oct. — Haarlem.

12. *C. delicata* Fr. (Ep. 670; O. I, 34). Sur des tuteurs soutenant des plantes du Cap, au niveau de la terre. [Avril 1866, Oudemans]. — Amsterdam (jardin botanique).

B. Ochrosporae. (Sporis ochraceis vel cinnamomeis).

* Colore luteo, cinnamomeo, croceo. Terrestres.

13. *C. aurea* Schaeff. (Ep. 670; H. 15). Bois feuillés, entre les feuilles tombées. [Juill. 1861, Hartsen]. — Zeist, Baarn. — Dieren.

14. *C. rufescens* Schaeff. (Fr. Ep. 670; O. I, 34). Bois de hêtres, entre les feuilles tombées. [Juill. 1862, Oudemans]. — Baarn, Zeist.

15. *C. formosa* P. (Fr. Ep. 671; Ned. Kr. Arch. V, 335). Bois de hêtres et bois à essences mêlées. [Août et Sept. 1861, Sprée]. — Apeldoorn, Lochem.

16. *C. flaccida* Fr. (Ep. 671; Prodr. 389). Dans les bois à aiguilles. — Oct. — Nijmegen.

** Colore albido, griseo, violaceo. Terrestres.

*** Truncigenae.

17. *C. stricta* P. (Fr. Ep. 673; Prodr. 389; Fl. Bat. t. 785). Au pied de vieux troncs d'arbres. — Sept. et Oct. — Bois de Haarlem. — Naaldwijk.

(*C. abietina* Prodr. no. 2761 appartient également, d'après M. v. d. Trappen, au *C. stricta*. — Driebergen).

18. *C. crispula* Fr. (Ep. 673; O. I, 34). Sur le bois pourrissant. [Oct. 1863, Six]. Driebergen.

19. *C. byssiseda* P. (Ep. 673; Prodr. 389). Sur le bois pourrissant. — Sept. et Oct. — Leiden.

†† Syncoryne. Subsimplices, basi caespitosae vel fasciculatae.

* Rubentes.

** Lutescentes vel albae.

20. *C. fusiformis* Sow. (Fr. Ep. 674; Prodr. 389). Pâturages et lieux herbeux. — Sept. et Oct. — Zuid-Beveland.

21. *C. inaequalis* Fl. Dan. (Fr. Ep. 674; Prodr. 389; Fl. Bat. t. 814). Collines bruyéreuses, pâturages, lieux herbeux. — Sept. à Nov. — Leiden, Westland. — Driebergen, Doorn.— Zuid-Beveland.

22. *C. argillacea* Fr. (Ep. 675; Prodr. 390; Fl. Bat. t. 814). Lieux herbeux et moussus. — Sept. et Oct. — Naaldwijk.

23. *C. vermicularis* Scop. (Fr. Ep. 675; Prodr. 390). Pâturages, vergers, etc. — Oct. et Nov. — Hilversum. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

24. *C. fragilis* HOLMSK. (Fr. Ep. 675; Prodr. 390). Pâturages, vergers, etc. — Oct. — Driebergen. — Zuid-Beveland.

*** Fuligineae vel nigricantes.

††† Holocoryne. Subsimplices, basi discretae.

* Colore mutabili, obscurato.

25. *C. contorta* HOLMSK. (Fr. Ep. 677; Ned. Kr. Arch. 2e Sér., I, 166). Sur des ramilles pourrissantes. [1871, VAN DER TRAPPEN]. — Naaldwijk.

26. *C. fistulosa* FR. (Ep. 677; Ned. Kr. Arch. V, 336). Jardins et pâturages. [Oct. 1861, SPRÉE]. — Veenwouden.

27. *C. juncea* FR. (= *Cl. Klotzschii* Lasch; Ep. 677; Ned. Kr. Arch. V, 336). Sur des feuilles de chêne tombées. [Oct. 1861, SPRÉE]. — Veenwouden.

28. *C. fuscata* OUD. (Fr. Ep. 678; O. I, 35). Sur la terre d'une caisse en bois, dans laquelle était cultivé le *Philodendron bipinnatifidum*. [Nov. 1861, OUDEMANS]. — Amsterdam (jardin botanique).

** Colore immutabili, vulgo candido.

29. *C. falcata* P. (Fr. Ep. 678; O. I, 35). Sur la terre de pots dans lesquels étaient cultivées des Ericacées. [Avril 1866, OUDEMANS]. — Amsterdam (jardin botanique).

L. CALOCERA.

* Ramosae.

1. *C. viscosa* WEINM. (Fr. Ep. 680; Prodr. 392; H. 15). Sur le bois vermoulu, dans les bois à aiguilles. — Juill. à Oct. — Rijzenburg. — Lochem, Brummen. — Assen.

* * Caespitosae.

2. *C. cornea* Fr. (Ep. 680; Prodr. 392). Sur les trons d'arbres, les pieux, les planches, les poutres, etc. — Sept. et Oct. — Westland. — Hemmen. — Zuid-Beveland.

* * * Simplices, discretae.

LI. PTERULA.

LII. TYPHULA.

† Phacorrhizae. Ex hybernaculis sclerotioideis enatae.

1. *T. erythropus* Fr. (Ep. 683; Prodr. 390). Sur des feuilles tombées. — Sept. et Oct. — Leiden. — Zuid-Beveland.
2. *T. phacorrhiza* Fr. (Ep. 683; Ned. Kr. Arch. V, 336). Sur des feuilles pourrissantes. [Oct. 1861, Sprée]. — Veenwouden.
3. *T. gyrans* Fr. (Ep. 684; Prodr. 390). Sur des feuilles et autres débris végétaux en putréfaction. — Nov. — Zuid-Beveland.

†† Leptorrhizae. Tuberculo radicali latente vel nullo.

4. *Grevillei* Fr. (Ep. 685; Prodr. 390). Sur des feuilles pourrissantes. — Oct. — Leiden.

LIII. PISTILLARIA.

1. *P. quisquiliaris* Fr. (Ep. 687; Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 166). Sur des trognons de chou en pourriture. [Oct. 1871, van der Trappen]. — Naaldwijk.

LIV. MICROCERA.

VI. TREMELLINEI.

LV. TREMELLA.

† Mesenteriformes. Cartilagineo-gelatinosae, foliaceae, nudae.

1. *T. fimbriata* P. (Fr. Ep. 690; Prodr. 391). Sur les vieux troncs et les branches mortes de l'aune. — Sept. et Oct. — Westland, la Haye.
2. *T. foliacea* P. (Fr. Ep. 690; Prodr. 392). Sur les branches mortes et le bois pourrissant du chêne. — Oct. et Nov.— Westland. — Utrecht.
3. *T. lutescens* P. (Fr. Ep. 690; Prodr. II, pars 4, p. 4). Sur du bois pourrissant. — Déc. — Goes.

†† Cerebrinae. E compacto pulposae, sporis subpruinosae.

4. *T. mesenterica* Retz. (Fr. Ep. 691; Prodr. 392). Sur les vieux pieux et sur le bois humide. — Oct. à Janv. — Amsterdam, Bois de Haarlem. — Leiden, Westland. — Utrecht. — Zuid-Beveland.
5. *T. albida* Huds. (Fr. Ep. 691; Prodr. II, pars 4, p. 3). Sur le bois pourrissant du chêne et du hêtre. — Mai. — Bois de la Haye. — Zuid-Beveland.
   β. effusa A. S. Sur des écorces pourrissantes de peupliers. — Zuid-Beveland.

††† Crustaceae. Effusae, applanatae.

†††† Tuberculiformes. Minores, suberumpentes.

LVI. EXIDIA.

† Auriculinae. Pezizoideae.

1. *E. recisa* Fr. (Ep. 693; Prodr. II, pars 4, p. 3). Sur les branches mortes et tombées des chênes et des saules. — Déc. — Leiden. — Meppel. — Groningen.

†† Spicularíae. Subapplanatae, subtus impolitae, evidentius glandulosae, passim gyrosae.

2. *E. glandulosa* Fr. (Ep. 694; Prodr. 391). Sur le tronc et les branches des vieux chênes. — Oct. à Janv. — Haarlem. — Wassenaar, Westland.

α. papillata Fr. Sur du bois pourrissant. — Déc. — Zuid-Beveland.

3. *E. saccharina* Fr. (Ep. 694; Ned. Kr. Arch. V, 336). Sur une souche de pin. [1862, Buse]. — Renkom.

LVII. HIRNEOLA. Genus deleendum.

H. Aur. Judae = Auricularia sambucina.

LVIII. FEMSJONIA.

LIX. NAEMATELIA.

LX. GUEPINIA.

LXI. DACRYMYCES.

* Rubri.

* * Lutescentes.

1. *D. deliquescens* Duby. (= *D. tortus* Fr. El). (Fr. Ep. 698; Prodr. I 392 et II, pars 4, p. 4). Sur le bois de sapin en pourriture. — Au printemps et en automne. — Amsterdam. — Leiden. — Utrecht. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

2. *D. stillatus* Nees (Fr. Ep. 699; Prodr. I 393 et II, pars 4, p. 4; H. 15). Sur les vieux pieux, les vieilles planches, etc. — Au printemps et en automne. — Amsterdam, Overveen. — Leiden. — Utrecht. — Harderwijk. — Zuid-Beveland. — Maastricht.

*** Pallidi vel fusci.

3. *D. succineus* Sprée. (Ep. 699 et Rab. F. E. 680). Sur des aiguilles tombées et pourrissantes de *Pinus sylvestris*. [Avril 1861, Sprée]. — Lochem.

4. *D. hyalinus* Lib. (Fr. Ep. 700; Ned. Kr. Arch. V, 350). Sur des aiguilles sèches de pin. [Sprée]. — Lochem, Rhenen.

5. *D. nitidus* Lib. (Ned. Kr. Arch. V, 350). Sur des branches sèches de *Rubus fruticosus*. [Sprée]. — Lochem.

TREMELLINEI SPURII.

LXII. APYRENIUM.

LXIII. HYMENULA.

* Nigrae vel fuscae.

** Pallidae vel laete coloratae.

1. *H. vulgaris* Fr. (Ep. 701; Arch. Néerl. VIII, 352 et Ned. Kr. Arch. 2e Série, I, 313). Sur des tiges à demi pourries de *Ricinus communis*. [Sept. 1872, van der Trappen]. — Naaldwijk.

(*A suivre*).

EXPLICATION DES ABRÉVIATIONS.

Fr. Ep. = E. Fries, Hymenomycetes Europaei sive Epicriseos Systematis Mycologici editio altera. Upsaliae, 1874.

Prodr. = Prodromus Florae Batavae, Vol. II pars 3, Lugd. Bat. a° 1866 et pars 4, a° 1866.

H. = F. A. Hartsen, Liste provisoire des Fonges Supérieurs qui croissent dans les Pays-Bas du Nord, servant de continuation au Prodromus Florae Batavae. Utrecht 1864.

Fl. Bat. = Flora Batava, Tom. I — XVI, Amsterdam, 1800 — 1879. [Editoribus Kops, van Hall, Miquel, van der Trappen, Gevers Deynoot, van Eeden].

O. I et II = C. A. J. A. Oudemans. Matériaux pour la flore mycologique de la Néerlande, 1e et 2e parties, publiées dans les Archives Néerlandaises, T. II, a° 1867 et T. VIII, a° 1873.

Ned. Kr. Arch. = Nederlandsch Kruidkundig Archief. 1e Série, T. I — V et 2e Série T. I — III, Leiden, a° 1848—1879.

Les noms et les dates placés entre parenthèses brisées [ ] ne se trouvent que derrière les espèces qui ne figurent pas dans le Prodromus. Ils font connaître par qui et à quelle époque ont été recueillies pour la première fois ces espèces découvertes depuis la publication de l'ouvrage en question.

SUR LA

SIGNIFICATION GÉNÉTIQUE DES MUSCLES EXTENSEURS DES DOIGTS,

PAR

W. KOSTER.

(*Avec une planche*).

L'anatomiste qui a fréquemment disséqué les mêmes parties du corps humain, ou qui est versé dans les écrits concernant les anomalies et les variétés organiques, pourrait facilement arriver à croire que les règles de la somatologie ne sont guère plus certaines que les règles grammaticales, dont les exceptions ont souvent mis à la torture nos jeunes intelligences.

C'est surtout le traité des os, des articulations et des muscles qui est riche en anomalies et en variétés. De leur nature, toutes méritent l'attention de l'anatomiste, à raison de la valeur qu'elles peuvent avoir pour l'étude comparative et génétique de la structure du corps humain; beaucoup d'entre elles ont d'ailleurs une importance propre, au point de vue de la physiologie et de la médecine pratique.

On sait que des muscles tout à fait exceptionnels peuvent se rencontrer aux membres supérieurs; et nombreuses sont en outre les modifications que présentent les muscles ordinaires, quant à leur nombre, leur mode d'union avec d'autres parties, la multiplicité des tendons dans lesquels ils se divisent etc. Beaucoup de ces variétés musculaires sont encore, pour le moment, des faits isolés, en apparence de simples curiosités, et comme telles connues seulement des anatomistes de profession et perdues dans les registres des laboratoires anatomiques. D'autres, au contraire, ont déjà pu être rattachées à nos connaissances zootomiques et ontogénétiques, ou même utilisées dans les considérations phylogénétiques.

C'est à cette dernière catégorie que me paraît se rapporter une particularité qu'on observe quelquefois chez le muscle extenseur propre de l'index, ou muscle indicateur.

A l'état regardé comme normal, ce muscle appartient, comme on le sait, au groupe de muscles dont les fibres, à la face dorsale de l'avant-bras, croisent obliquement l'axe de l'avant-bras. Il s'insère alors, à côté du long extenseur du pouce, avec lequel il se confond à l'origine, à la face du cubitus qui est tournée vers le radius ainsi qu'au ligament interosseux; après s'être entièrement isolé, il donne naissance à un tendon, qui traverse avec le muscle extenseur commun des doigts une même coulisse du ligament dorsal du carpe et s'étend ensuite à côté du tendon indicateur de ce muscle extenseur commun.

D'après ce qui vient d'être dit, le muscle en question, après son origine, n'a donc plus rien de commun avec le long extenseur du pouce. Aussi, dans les cas ordinaires, n'aperçoit-on au dos de la main, dans le premier espace interrosseux, si large et si extensible par le déplacement de l'os métacarpien du pouce, aucune trace de liaison entre les tendons de l'index et du pouce.

Or, la particularité que je me propose de faire connaître consiste essentiellement en ceci, que parfois on constate une connexion entre le tendon du long extenseur du pouce et celui de

l'extenseur propre de l'index, dans le premier espace interrosseux, ci-dessus mentionné.

J'ai été conduit à cette découverte par un accident qui attira forcément toute mon attention sur ma propre main droite. Dans l'hiver de 1875—1876, l'espace interrosseux entre le pouce et l'index de cette main, de même que tout le dos de la main et le bras entier, eut beaucoup à souffrir, à la suite d'infection cadavérique, d'un phlegmon sous-fascial, accompagné de phlébite, de lymphangite, d'abcès profonds, etc. Dans ce premier espace interrosseux, toutefois, il n'y eut pas de suppuration, comme c'était le cas allleurs.

Après plusieurs semaines d'immobilité, le moment vint où je pus de nouveau essayer quelques mouvements passifs et actifs avec ma main et mon bras extrêmement amaigris. Pour l'articulation carpienne, également très maltraitée par le pus qui l'avait baignée et par la longue immobilité à laquelle elle avait été condamnée, ces tentatives ne réussirent pas; mais elles furent couronnées de succès en ce qui concerne les mouvements de pronation et de supination de la main, ainsi que les mouvements des doigts. En faisant mouvoir le pouce, je vis alors, à travers la peau très amincie de la face dorsale du premier espace interrosseux, se dessiner des bandes ou des cordons qu'auparavant je n'avais jamais remarqués en cet endroit. A la main gauche, qui était aussi très maigre, rien de pareil ne s'observait, ni à la vue, ni au toucher.

Au commencement, je ne savais absolument que penser de ces apparences. Etaient-ce des cordons de tissu connectif restés épaissis après leur violente inflammation, ou des veines oblitérées et changées en cordons par l'effet de la phlébite?

Ces suppositions, et bien d'autres encore, se présentèrent successivement à mon esprit. Finalement, toutefois, je dus bien reconnaître que les bandes en question étaient en rapport avec le tendon du muscle indicateur.

Le lecteur pourra se faire une idée de ce dont il s'agit à l'aide de la planche jointe à ce Mémoire, planche qui rend exactement

l'état des bandes tendineuses anomales de ma main, bien qu'elle ait été faite d'après une main morte et disséquée, dont je parlerai plus loin.

Au niveau de l'apophyse styloïde du radius, là où il existe déjà un assez grand intervalle entre le tendon ordinaire de l'index et celui de l'extenseur du pouce, et où dans les cas habituels on peut sentir les tendons des extenseurs radiaux de la main, et même les voir si la main est maigre, à ce niveau, dis-je, on voit, tout près du tendon extenseur de l'index, une bande surnuméraire, qui plus loin descend à peu près diagonalement entre les tendons du pouce et du doigt, pour se diviser ensuite en deux branches. La branche extérieure, celle qui est dirigée vers le pouce, se porte alors, en divergeant davantage, vers le tendon du long extenseur du pouce, avec lequel elle se confond un peu au-dessous de l'articulation métacarpo-phalangienne. Cette bande tendineuse est forte et épaisse; par la flexion du pouce, et surtout par l'abduction de l'os métacarpien du pouce, elle se tend fortement, ce qui donne naissance, entre elle et le tendon du long extenseur du pouce, à une seconde „tabatière anatomique", plus petite que l'ordinaire. Lors de l'extension du pouce, et du mouvement adducteur-extenseur (actif) de l'os du métacarpe, la bande éprouve un déplacement et une tension notables. La seconde bande, après la bifurcation susdite, se porte vers les tendons extenseurs de l'index, les côtoie quelque temps sous un angle aigu, puis s'unit avec eux au niveau de l'articulation métacarpo-phalangienne. Lors de l'extension du doigt indicateur, on voit, à la face dorsale du poignet très amaigri (par l'ankylose), se dessiner nettement la direction des muscles extenseurs des doigts, et, dans son prolongement, la bande qui vient d'être décrite. Au milieu de l'espace entre le pouce et l'index, toutefois, cette bande est alors, par la tension simultanée de l'autre bande (celle qui se porte au pouce), déplacée non seulement dans la direction de la traction musculaire, mais aussi en dehors (vers le pouce).

Ainsi que je l'ai dit plus haut, avant l'état de maladie de la main je n'avais jamais rien remarqué de ces bandes tendineuses

anomales. Il n'est guère douteux, pourtant, qu'elles existassent déjà, mais beaucoup moins développées et se dérobant à la vue.

Cette interprétation était déjà suffisamment justifiée par l'extrême invraisemblance de la seule alternative qui reste, à savoir, celle d'une néo-formation accidentelle sous l'influence de l'état morbide; mais elle prit un caractère de certitude lorsque, à la suite de longues recherches sur tous les cadavres qui me passèrent par les mains après que j'eus repris mes occupations, je réussis enfin à trouver une disposition exactement semblable des tendons du pouce et du doigt indicateur. En travaillant sur un bras que par hasard je n'avais pas examiné moi-même au point de vue qui me préoccupait, un de mes élèves, par la dissection des muscles extenseurs des doigts, avait obtenu la préparation d'après laquelle a été faite la planche ci-dessus citée. La main provenait d'un jeune homme; l'appareil musculaire du bras et de la main ne présentait du reste rien de particulier. J'ignore si l'anomalie existait aussi à l'autre main du même cadavre, attendu que cette main avait déjà servi à la préparation des parties profondes, lorsque j'eus l'occasion de la voir. On retrouve sur la planche, exactement telles que je les ai décrites, les bandes tendineuses anomales qui, chez moi, s'observent à travers la peau de la main. L'étude spéciale de la préparation montre ce qui suit.

Le muscle indicateur naît de la manière ordinaire, et le tendon du muscle traverse aussi, avec celui de l'extenseur commun des doigts, la même gaîne du ligament dorsal du carpe. Mais ensuite se produit la bifurcation, d'où résultent une bande se rendant au long extenseur du pouce et une autre rejoignant le tendon primitif, lequel se confond, de la manière habituelle, avec le tendon que le muscle extenseur commun envoie au doigt indicateur. Ce doigt reçoit donc trois tendons.

La connexion ainsi établie entre l'extenseur du pouce et celui de l'indicateur offrait, avant qu'on eût isolé les bandes, plutôt le caractère d'une expansion aponévrotique, caractère qu'au reste on peut encore constater aujourd'hui, sur la prépa-

ration [1]). Le liaison entre ces tendons a donc beaucoup d'analogie avec les liaisons aponévrotiques ordinaires qui existent toujours entre les tendons du muscle extenseur commun aux quatre doigts. Mais, entre le tendon du pouce et celui du doigt indicateur, manque précisément, dans les cas ordinaires, toute connexion. — La connexion est le plus faiblement accusée entre le doigt indicateur et le doigt du milieu, le mieux développée entres les trois autres doigts: ainsi, *plus les doigts sont indépendants et libres dans leurs mouvements*, *plus leurs tendons sont isolés.* Ce fait a une importance capitale pour l'appréciation ultérieure de la particularité anatomique dont il s'agit ici.

A ma connaissance, la connexion entre les tendons extenseurs du pouce et de l'index n'a pas encore été décrite. Sans doute, les recherches les plus persévérantes ne sauraient donner

---

[1]) Depuis que ce mémoire a été écrit, j'ai rencontré encore un autre cas où la connexion entre l'extenseur de l'index et l'extenseur du pouce était fortement accusée. C'était sur le cadavre d'un homme de cinquante ans, à squelette et système musculaire bien développés. Cette fois, je pus moi-même faire la préparation tout entière. Entre le long extenseur du pouce et le tendon extenseur de l'index, était tendue une lame aponévrotique, à faisceaux fibreux transversaux et plus ou moins courbés en arc de cercle. Cette lame aponévrotique se rattachait tant au tendon indicateur de l'extenseur commun qu'au tendon ordinaire du muscle indicateur, situé au côté cubital du premier; par son intermédiaire, ces deux tendons étaient donc unis entre eux et avec le tendon du pouce. Mais, en outre, on voyait sur cette lame aponévrotique, précisément dans la direction des bandes tendineuses représentées dans la figure du cas précédent et si fortement développées sur ma propre main, des faisceaux de fibres plus épais et plus longs, qui se tendaient fortement aussi quand on exerçait une traction sur les muscles extenseurs. En suivant la lame aponévrotique sous le ligament dorsal du carpe, on la voyait, le long du tendon du pouce, se confondre avec lui sans limites bien marquées; mais, de l'autre côté, elle traversait avec les tendons extenseurs de l'index la gaîne de ceux-ci, et se terminait en un tendon bien distinct et bien développé, constituant un second tendon au muscle indicateur.

A l'autre main s'observait la même disposition, mais à un degré beaucoup plus faible. Le mieux accusées étaient les bandes qui se rendaient au côté cubital du tendon du pouce; le reste de la lame aponévrotique était extrêmement mince.

la certitude qu'on a consulté tous les écrits concernant les anomalies musculaires, et il ne serait donc pas impossible que le fait eût été consigné quelque part. Néanmoins, si l'on considère ce que Meckel, dans son ouvrage si riche en détails, et Henle, dans son grand traité d'anatomie, rapportent au sujet des anomalies du muscle indicateur, il est permis de croire que celle dont il s'agit ici n'était pas encore connue.

Voici ce que dit Meckel [1]):

„A la main, il n'est pas rare de trouver ou bien le tendon du muscle indicateur fendu en deux languettes, dont l'une se rend au doigt du milieu; ou bien un tout petit extenseur propre du doigt médian, qui vient ordinairement de l'extrémité inférieure du radius; cette dernière anomalie est remarquable à cause de l'analogie avec ce qui existe chez les singes, et, en général, à cause de la multiplication des muscles extenseurs au pied antérieur des mammifères".

Henle s'exprime au sujet des variétés du muscle indicateur de la manière suivante [2]):

„Il manque entièrement, ou bien est remplacé par un muscle court du dos de la main, qui naît du ligament propre du carpe ou de la base du troisième os métacarpien. D'autres fois il est à deux ventres reliés par un long tendon intermédiaire, le ventre inférieur étant situé au dos de la main. Fréquemment on trouve des degrés divers de scission et de multiplication: le muscle simple envoie deux tendons au second doigt, ou un au second et un au troisième, ou deux au second et un au troisième doigt. Lorsqu'il y a deux ventres musculaires, le second, le plus profond, donne un tendon au troisième doigt, ou même trois tendons, du deuxième au quatrième doigt."

On voit que, dans toutes ces modifications, il n'est pas question d'une connexion entre les tendons du pouce et du doigt

---

[1]) *Handbuch der pathologischen Anatomie, von* Johann Friedrich Meckel, t. II, sect. I, p. 30.

[2]) *Handbuch der systematischen Anatomie des Menschen, von* Dr. J. Henle, *Muskellehre*, p. 213.

indicateur. Il semblerait qu'une particularité anatomique, si prononcée dans ma propre main et dans la main représentée par la planche, devrait se rencontrer, au moins à un degré moindre, plus souvent que cela ne paraît être le cas. L'idée qui s'offre naturellement, c'est que ces degrés inférieurs ont passé jusqu'ici inaperçus et ont été enlevés par l'opérateur dans la mise à nu de l'état ordinaire. Telle était aussi mon opinion au commencement; mais, depuis lors, j'ai examiné avec attention à ce point de vue environ trente cadavres, sans réussir à trouver une trace de connexion; le cas représenté par la planche est le seul que j'aie rencontré. Si l'attention n'est pas spécialement éveillée, il arrivera ordinairement qu'en détachant entre les os métacarpiens du pouce et de l'index le fascia lateralis, le scalpel enlèvera en même temps les bandelettes de connexion qui pourraient s'y trouver.

On pourrait encore demander si j'ai bien le droit de regarder l'anomalie figurée et les bandes perceptibles sous la peau de ma main droite comme se rapportant à la même transformation spéciale du muscle indicateur en plusieurs tendons. La préparation figurée a été décrite ci-dessus, et j'ai fait voir que c'est bien le muscle indicateur qui s'y trouve en jeu. Quant à ma main, la dissection seule pourrait donner la certitude que l'état y est précisément le même. En effet, l'une des anomalies mentionnées par Meckel pourrait produire les mêmes apparences. A la suite du passage ci-dessus cité, Meckel dit: „J'ai aussi trouvé plus d'une fois un troisième extenseur du pouce, tout à fait distinct." En supposant que le tendon de ce muscle soit situé à la place qu'occupe chez moi la bande tendineuse allant au pouce, et qu'une branche s'en détache pour se rendre au doigt indicateur, on verrait exactement ce qui se voit maintenant. — Quoi qu'il en soit, l'anomalie du muscle indicateur se rencontre, comme le prouve le cas ici figuré; et, — fût-il vrai qu'à ma main l'indicateur soit normal et qu'il y ait par contre un troisième extenseur du pouce, envoyant une bande de connexion à l'extenseur de l'index, la signification du fait n'en serait pas changée. Car, ce qui me paraît résulter des particularités anthropotomiques

que je viens de communiquer, c'est *la connexion originelle des tendons des muscles extenseurs du pouce et du doigt indicateur, connexion qui aujourd'hui ne se montre plus que par atavisme, çà et là et sous différentes formes.*

Lorsque, pour expliquer la production des anomalies et des variétés dans la structure du corps humain, on ne veut avoir recours ni aux puérilités de l'anthropomorphisme, ni aux obscurités du supranaturalisme, il ne reste plus que la théorie darwinienne, la théorie *phylogénétique.* Des influences accidentelles, au sens restreint du mot, et qui n'intéressent qu'un individu déterminé, peuvent bien donner naissance à des particularités de structure ou de forme; et l'„état pathologique", si difficile qu'il soit à distinguer nettement et en général des „anomalies individuelles" et des modifications phylogénétiques, ne doit pas non plus être perdu de vue. Mais des variétés de muscles et de tendons, telles que celles dont il s'agit ici, ne peuvent évidemment s'expliquer que par l'évolution embryonnaire; et la manière dont les choses se passent ne devient un peu compréhensible que par la voie phylogénétique, par l'hypothèse que tous les animaux vertébrés descendent des mêmes ancêtres, que par conséquent les mammifères aussi ont entre eux des liens de parenté, qu'enfin l'homme et les singes, entre lesquels la parenté est le plus étroite, qui se ressemblent le plus par la forme et la structure, possèdent, à l'état embryonnaire, les germes, les rudiments des mêmes parties. Les modifications dans le mode de développement, qui produisent les espèces actuellement existantes, déterminent alors les différences relativement petites de la structure des mammifères, différences que la théorie de l'évolution cherche à expliquer en s'appuyant sur l'anatomie comparée et sur la considération des conditions d'existence physiologiques (hérédité, usage des parties, nourriture, climat, sociabilité, influences intellectuelles et morales).

Sans vouloir affirmer que la doctrine de la descendance soit

ou puisse être prouvée par cela seul qu'elle explique la remarquable analogie qui existe dans l'organisation des formes vertébrées, en les faisant dériver de formes inférieures au moyen de modifications *naturelles* des parties constituantes, on doit pourtant être frappé de ce que, en présence de faits morphologiques nouveaux ou exceptionnels, on peut, sans crainte de déception, procéder et raisonner comme si la doctrine de la descendance était une théorie parfaitement fondée.

Pour l'anatomiste, la théorie de l'évolution est en tout cas le seul principe *heuristique* qui puisse lui fournir une explication soit des analogies et des différences dans l'organisme des animaux, soit des anomalies et des variétés — la plupart de véritables théromorphies — dans l'organisme humain. Dans le cas qui nous occupe, pour ne pas remonter trop haut, nous nous abstiendrons de rechercher dans quelles conditions se rencontrent pour la première fois des orteils ou des doigts, ainsi que les matériaux de leurs muscles extenseurs. Pour l'explication génétique, en premier lieu de la connexion entre le tendon extenseur du pouce et celui de l'index, et en second lieu de l'existence d'un double système d'extenseurs des doigts (les extenseurs parallèles à l'axe de l'avant-bras et les extenseurs obliques du doigt indicateur et du pouce), nous demandons seulement si, partout ou des doigts ont pris naissance, *on rencontre les mêmes formes fondamentales, et si les théromorphies de l'homme trouvent ainsi leur explication.* — Si tel est le cas, on peut essayer de découvrir dans les particularités physiologiques de l'espèce animale les raisons pour lesquelles les mêmes matériaux se sont développés sous des formes diverses, mais déterminées (variables seulement, çà et là, entre les limites de la communauté d'origine).

A la première question, on peut faire, après quelques recherches, une réponse très satisfaisante. La musculature des membres antérieurs des animaux, notamment chez les singes et surtout chez les anthropoïdes, a toujours été un objet d'intérêt et d'étude pour les anatomistes.

Dans le grand traité de zoologie de M. Harting (tome II, 2e sect., Morphologie des animaux vertébrés, p. 277), on lit: „Le long extenseur du pouce ne se trouve, comme muscle extenseur propre du pouce, que chez l'homme et les singes". Dans la superbe monographie de Straus-Durckheim, au contraire, on trouve décrit chez le chat [1]): „Le long extenseur du pouce, très grêle, placé avec le muscle indicateur dans une gaîne aponévrotique commune, et situé le long de la face externe du cubitus, auquel il se fixe par des fibres charnues, dans le tiers supérieur de cet os, depuis le milieu de la grande cavité sigmoïde, et par conséquent beaucoup plus haut que dans l'homme".

Cuvier [2]) non plus ne paraît pas admettre un extenseur propre du pouce chez le chat et la plupart des carnassiers, mais il le reconnaît pourtant encore à d'autres animaux qu'aux singes et à l'homme: Il dit: „Après les singes, le pouce n'a plus d'extenseur propre que dans l'ours, le phoque, les marsupiaux et les rongeurs à clavicule; encore est-il déjà réuni supérieurement à celui de l'index."

Gratiolet, l'ardent défenseur de la différence spécifique entre les singes anthropoïdes et l'homme, différence qui d'après lui apparaît aussi, claire comme le jour, dans la dissection des muscles de la main, donne la description suivante [3]) des muscles fléchisseurs du pouce (les antagonistes de l'extenseur propre du pouce, dont nous nous occupons): „L'anatomie révèle des différences profondes et réellement typiques entre l'homme et les singes les plus élevés. Chez les singes le pouce est fléchi par une division oblique du tendon commun des autres doigts. Il est donc entraîné dans les mouvements communs de flexion et n'a aucune liberté.

---

[1]) *Anatomie descriptive et comparative du Chat, type des mammifères en général, et des carnivores en particulier*, tome second, p. 366. Avec atlas.

[2]) *Leçons d'anatomie comparée, seconde édition corrigée et augmentée*, tome premier, p. 459.

[3]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, 1864, t. 59, p. 322.

Chez aucun d'eux il n'y a la moindre trace de ce grand muscle indépendant qui meut le pouce dans l'homme.

Loin de se perfectionner, ce doigt si caractéristique de la main humaine semble chez les plus élevés de tous ces singes, les orangs, tendre à un anéantissement complet. Ces singes n'ont donc rien dans l'organisation de leur main qui indique un passage aux formes humaines, et j'insiste à ce sujet, dans mon Mémoire [1]), sur les différences profondes que révèle l'étude des mouvements dans des mains formées pour des accommodations d'ordre absolument distinct."

Pourtant, dans les „Leçons" de Cuvier, publiées tant d'années auparavant, on pouvait déjà lire (*l. c.*, p. 451): „Il n'y a déjà plus, même dans les singes, de fléchisseur propre du pouce; *mais le fléchisseur profond a ordinairement un ventre radial qui le remplace.* Ce dernier muscle est composé de plusieurs ventres; il en reçoit souvent un ou deux de la tubérosité interne de l'humérus et un du fléchisseur sublime, et il se partage en autant de tendons qu'il y a de doigts." — Pour le mouvement libre du pouce, un fléchisseur propre n'est d'ailleurs nullement nécessaire, comme peuvent le prouver le doigt annulaire et le doigt indicateur de l'homme, qui doivent aussi se contenter d'une partie du fléchisseur et de l'extenseur communs, surtout le doigt indicateur, dans le cas assez fréquent où l'extenseur propre manque. Et — si Gratiolet n'en exige pas moins pour le pouce un fléchisseur propre, en vue de son mouvement indépendant — il y a dans les muscles courts du pouce (qui chez l'homme forment ce qu'on appelle le thénar) de quoi le satisfaire complétement. Dans les figures jointes au travail consciencieux et détaillé de Th. L. W. Bischoff sur les muscles des mains des singes [2]), et dans celles de Gratiolet lui-même, ces muscles fléchisseurs du pouce montrent un développement plutôt supérieur qu'inférieur à celui

---

[1]) Paru dans les *Nouv. Archives du Muséum d'hist. natur.*, 1866.

[2]) *Abhandlungen der mathem.-physik. Classe der K. Bayerischen Akad. d. Wissensch.*, t. X, Munchen, 1870.

qu'ils ont chez l'homme; et dans les „Leçons" déjà citées de Cuvier, on lit, à la page 452: „le court fléchisseur du pouce naît de presque toute la face inférieure des os du carpe, et se termine à la première phalange."

Bischoff, dans le grand Mémoire qui vient d'être cité, déclare que le long extenseur (propre) du pouce existe chez tous les singes; et Cuvier nous a déjà appris que beaucoup de mammifères inférieurs le possèdent également. Par contre, Bischoff mentionne aussi, d'accord avec Gratiolet, que le *fléchisseur propre du pouce* manque dans le Gorille, le Chimpanzé, les Gibbons; etc. et n'existe qu'à l'état rudimentaire chez le *Pithecia hirsuta.* Au sujet du fléchisseur profond commun des doigts chez les anthropoïdes ci-dessus nommés en premier lieu, Bischoff dit (*l. c.*, p. 214): „qu'il remplace, par un mince tendon qu'il envoie au pouce, le long fléchisseur du pouce, lequel manque dans tous les singes" (*Pithecia* fait toutefois exception, d'après les indications données par l'auteur lui-même dans le résumé subséquent).

Ce qu'il y a, dans le court aperçu qui vient d'être donné des muscles des doigts des mammifères, de plus intéressant pour les partisans de la différence spécifique entre l'homme et le singe, c'est *le développement défectueux du long fléchisseur propre du pouce.* S'il entrait dans mon plan d'examiner à fond la question tout entière, nous arriverions sans aucun doute à ce résultat, que le long fléchisseur du pouce est un signe tout aussi illusoire de la spécifité humaine que le muscle opposant du pouce, dans lequel, il y a quelques années, plusieurs anatomistes avaient cru voir une des différences les plus importantes entre le singe et l'homme.

Mais cet aperçu ne devait servir qu'à donner une base à mes vues sur les *extenseurs des doigts.* En supposant, chez les observateurs originaux, une dose suffisante d'idées préconçues, il n'est pas difficile de mettre de l'ordre dans le chaos apparent. Je me bornerai à deux remarques. En premier lieu, il est évident, tant chez Bischoff que chez Gratiolet, qu'ils partent tout à fait arbitrairement de la notion d'un fléchisseur

propre et indépendant du pouce, fondée sur un examen superficiel de l'état des muscles dans l'homme. Si l'on élargissait le point de vue, on reconnaîtrait que ce qu'ils trouvent dans les singes et les mammifères inférieurs se laisse beaucoup mieux concilier avec l'existence du long fléchisseur de l'homme par la voie de la phylogénèse, qu'avec l'idée d'une disposition ne s'observant que chez l'homme et expressément créée pour ses besoins [1]). En second lieu, si même, se tenant à la lettre, on veut regarder comme exactes les vues morphologiques en question, l'idée préconçue ne s'y découvre pas moins quand nous voyons leurs partisans, Gratiolet surtout, confondre tout à coup le domaine de la morphologie avec celui de la physiologie. „L'anatomie révèle des différences profondes et réellement typiques entre l'homme et les singes les plus élevés", dit-il. Je pense que cela même est inexact; mais écoutons maintenant la conclusion qu'il tire de cette prémisse: „le pouce est donc entraîné dans les mouvements communs de flexion et n'a aucune liberté"! Et plus loin: „j'insiste sur les différences profondes que révèle l'étude des mouvements dans les mains formées pour des accommodations d'ordre absolument distinct". Or il ne s'agit ici que de la main morte du Chimpanzé, et je ne crois pas que quelqu'un puisse indiquer, d'une manière précise et complète, — non pas ce qu'un Chimpanzé ou un Gibbon fait avec sa main, mais ce qu'il *pourrait* en faire, en dépit de son organisation un peu différente de celle de la main humaine. J'ai déjà noté, en passant, qu'il n'est nullement permis de déduire les mouvements des particularités que présentent les muscles, surtout lorsqu'on ne tient aucun compte d'une portion importante du système musculaire. Sans contredit, le grand développement du long fléchisseur du pouce et son insertion à la phalange extrême de ce doigt sont, chez l'homme, en rapport avec les

---

[1]) Ce qui surtout cadre très mal avec les idées de Gratiolet, c'est la connexion qu'on observe de temps en temps, chez l'homme, entre le tendon du fléchisseur propre et soi-disant tout à fait libre du pouce et le tendon indicateur du fléchisseur profond (une véritable „analogie simienne"). (Henle, *Muskellehre*, p. 196).

mouvements énergiques et d'usages très variés de l'article terminal du pouce. Sans contredit aussi, la modification de ce muscle et des autres, chez les singes, est en harmonie avec le développement intellectuel et la manière de vivre de ces animaux. La théorie de l'évolution progressive des formes inférieures en formes supérieures n'aurait pas pris naissance si la main et les autres parties du corps offraient exactement la même structure chez l'homme et les animaux. Mais qui a scruté ce qu'un Chimpanzé parviendrait à faire de ses doigts et de son pouce, si son intelligence, ses besoins et ses aspirations pouvaient jamais le conduire à essayer d'égaler l'homme? Je ne parle pas des modifications morphologiques que sa main pourrait alors encore éprouver; mais, telle qu'elle est constituée actuellement, cette main pourrait bien se montrer très peu inférieure à la main humaine; certainement elle donne déjà aujourd'hui, et donnerait de plus en plus, un démenti formel à l'assertion de Gratiolet, d'un „pouce entraîné dans les mouvements communs et sans aucune liberté."

Des vues inexactes tout à fait analogues se rencontrent aussi dans le grand travail d'Aeby sur les muscles du bras et de la main chez les mammifères et chez l'homme [1]).

„De tous les animaux", dit-il (p. 63), „l'homme est le seul dont la main se prête à un mouvement isolé du petit doigt et du doigt indicateur, circonstance qui en fait un instrument infiniment plus parfait que la main du singe. Il suffit de rappeler l'aptitude à laquelle le doigt indicateur est redevable de son nom". Comme si l'homme, sans muscle indicateur propre, ne pourrait rien désigner de son index! Et comment M. Aeby sait-il ce que l'homme pourrait faire avec une main de singe, de quoi l'index et le petit doigt seraient alors capables? Mais le pouce aussi est, dans ses *mouvements* (quoique M. Aeby n'aurait dû considérer les muscles qu'au point de vue morphologique), spécifique-

---

[1]) *Zeitschrift für Wissenschaftliche Zoologie von* v. Siebold *und* Kölliker, t. X, p. 34.

ment humain: „Chez l'homme seulement il a été pourvu à une extension propre de chacune des deux phalanges du pouce, ce qui sans doute n'est pas sans influence dans la mécanique des mouvements de la main" (même page). Non certes, dirons-nous volontiers. Aucun partisan de la théorie de l'évolution n'a d'ailleurs prétendu que le pouce de l'homme et celui des singes se ressemblassent de tout point; mais est-il sûr qu'un Chimpanzé, dans les circonstances appropriées, ne montrerait pas „une extension propre de chacune des deux phalanges du pouce"?

Avec la main la plus parfaite, avec le développement le plus complet du muscle fléchisseur propre du pouce, un idiot ne peut ni tracer une lettre, ni fabriquer un filet de pêche. Une personne intelligente, née sans bras, devient calligraphe ou peintre en se servant de ses pieds, ou exécute à leur aide des travaux de broderie qui sembleraient être le privilége des mains de femme les plus délicates.

En résumé, pour la saine appréciation des descriptions et des considérations anatomiques citées, il faut tenir compte de ceci:

1°. Gratiolet néglige entièrement, et Bischoff perd trop de vue, le fait que la „portion radiale" du fléchisseur profond des doigts des singes (déjà si bien décrit par Cuvier [1]) est précisément, ou peut devenir, le fléchisseur long du pouce de l'homme.

2°. Lorsqu'on étudie les muscles sous le rapport anatomique et morphogénétique, on doit rester sur ce terrain, et ne pas se

---

[1]) *l. c.*, p. 451: „Il n'y a déjà plus même dans les singes de fléchisseur propre du pouce; mais le fléchisseur profond a ordinairement un ventre radial qui le remplace. Ce dernier muscle est composé de plusieurs ventres". — Il serait facile de montrer, si cette démonstration était ici à sa place, que le raisonnement de Cuvier doit être retourné! — Le long fléchisseur du pouce, comme muscle propre et indépendant, est une notion d'anatomie humaine plus ancienne que la connaissance des faits de la zootomie. Quand on prend l'homme pour point de départ, les singes semblent ne pas avoir de long fléchisseur propre du pouce; mais il est plus exact de dire que le muscle de l'homme est une portion du muscle fléchisseur profond des singes, plus développée et devenue plus indépendante.

laisser influencer dans ses conclusions par les mouvements qu'on attribue à ces muscles. A un point de vue plus large, au contraire, les mouvements réellement exécutés par un organe serviront peut-être à expliquer les détails morphologiques [1]).

Après ces remarques sur le système musculaire des doigts en général, je crois, revenant aux muscles indicateur et extenseur long du pouce, pouvoir établir cette proposition: *les mêmes formes fondamentales se retrouvent chez tous les mammifères qui possèdent des doigts.* — L'aperçu général, qui nécessairement devait mentionner aussi le système des muscles fléchisseurs, a en outre déjà conduit partiellement au but que je m'étais proposé: *montrer que la connexion entre les tendons des deux muscles en question doit être regardée comme une théromorphie.*

L'observation nous apprend que déjà dans les mammifères inférieurs, à développement imparfait du système des orteils et des doigts, existent les éléments de deux espèces d'extenseurs des doigts. Toujours on rencontre, à côté de l'extenseur commun (c'est-à-dire, du muscle qui chez l'homme descend en ligne droite et étend les quatre doigts), un grand nombre d'autres faisceaux, unis à l'origine avec l'extenseur commun et se terminant très diversément, suivant l'organisation des membres antérieurs. Même chez le cheval, certainement très mal partagé sous le rapport des doigts, outre un extenseur commun des doigts, on en distingue un autre, auquel les hippotomistes donnent le nom d'extenseur latéral. Chez les carnassiers, on voit nettement accusé

---

[1]) Pour éclaircir une confusion apparente dans ce que j'ai rapporté des opinions de divers auteurs, je dois faire remarquer que M. Harting a évidemment voulu dire que le long fléchisseur du pouce (non l'extenseur) ne se trouve que chez l'homme. Il est d'ailleurs facile de comprendre que M. H., ne donnant qu'un aperçu succinct, n'ait pas mentionné expressément, à la page précédente (275), l'indépendance relative de ce fléchisseur, en ce qui concerne l'existence d'une *origine radiale isolée.*

un double système de muscles extenseurs, dont l'un (analogue au système oblique de l'homme) s'individualise, entre autres, très distinctement comme extenseur propre du doigt indicateur et du pouce. Cuvier, qui certes ne se doutait pas que sa description serait invoquée à l'appui d'idées darwiniennes, fait la remarque suivante (*l. c.*, p. 449), importante à mon point de vue: „Dans l'ours, il (l'extenseur propre de l'index) est réuni à l'extenseur du pouce."

Nous avons déjà mentionné que, parmi les carnassiers, le chat aussi possède un extenseur propre du pouce, qui a été décrit et figuré par Strauss-Dürckheim. En lisant cette description, on la croirait tirée d'un manuel d'anatomie humaine. Il serait trop long de la rapporter tout entière, mais je ne puis pourtant m'empêcher d'en citer la fin (p. 367): „Il se détache souvent du bord externe de ce tendon une branche qui se développe en aponévrose en s'appliquant tout le long du stéthos [1]) et se termine à la phalangéole de l'index, où elle se fixe." La satisfaction causée par cette description ne devient pas moindre quand on lit ensuite (même page), au sujet du muscle indicateur: „Ses fibres s'insèrent sur un tendon terminal fort grêle, qui s'engage dans une coulisse spéciale du ligament armillaire, à côté de celle du long extenseur du pouce; et souvent les deux sont réunies en une seule."

Chez le chien aussi, les tendons des deux muscles sont encore unis par une aponévrose. D'après la description de M. Leisering [2]): „son tendon (celui du muscle extenseur des premier et deuxième orteils) accompagne le tendon de l'extenseur commun des orteils,

---

[1]) Je rappellerai ici que l'auteur, pour éviter la confusion à laquelle donne souvent lieu la distinction des os métacarpiens d'après l'ordre numérique, a adopté une nomenclature propre, où l'os métacarpien du pouce est appelé stathos, les autres recevant successivement, selon l'ordre ordinaire des voyelles, les noms de stéthos, stithos, etc.

[2]) *Uebersicht der Skeletmuskeln des Hundes, von* Dr. Leisering, Professor an der Kön. Thierarzneischule zu Dresden, 1869.

le croise et s'insère par une branche très mince au premier orteil; par une branche plus forte au second" (p. 23). — M. Chauveau [1]) décrit également les muscles en question comme „confondus" chez le chien, „et n'existant qu'à l'état de vestiges chez les autres animaux" (domestiques).

Mon principe heuristique est encore en harmonie avec le fait que chez le *Pithecia hirsuta*, selon M. Bischoff (*l. c.*, p. 285), l'extenseur propre de l'index est „réuni au long extenseur du pouce." Nous arrivons ainsi aux Singes anthropoïdes, chez lesquels le long fléchisseur du pouce présente les caractères déjà mentionnés et qui ont donné lieu à des considérations d'une si vaste portée. L'état des muscles qui nous occupent maintenant, les *muscles extenseurs*, est plus facile à définir. En ce qu'il a d'essentiel, on peut dire que cet état est: *entièrement comme chez l'homme.* Mais les points accessoires, les particularités, pourraient bien avoir pour ma thèse plus d'importance que le caractère essentiel. Je n'ai pas seulement en vue la question, très permise, de savoir quelles anomalies et variétés seraient révélées s'il existait une médecine des Singes anthropoïdes, et si au profit de cet art les Orangs, les Chimpanzés et les Gibbons avaient été étudiés anatomiquement en aussi grand nombre que l'ont été les cadavres humains. Il n'est pas douteux qu'on trouverait alors (probablement aussi pour le long fléchisseur du pouce, ce muscle „anthroponomique") des „anthropomorphies" (c'est-à-dire, des cas accidentels où l'analogie de structure avec le corps humain serait encore plus prononcée), de même que nous connaissons maintenant, chez l'homme, des „théromorphies." Mais, à part cela, quelles particularités nous offrent encore ces muscles extenseurs des singes anthropoïdes, lorsqu'on les considère de plus près quant à leur origine, leur situation, leurs connexions et leur insertion?

Gratiolet décrit le système des extenseurs accessoires ou propres

---

[1]) *Traité d'anatomie comparée des animaux domestiques*, par A. Chauveau, avec la collaboration de S. Arloing. Paris, 1870.

des doigts comme „extenseur latéral" (se réunissant latéralement par ses tendons à celui de l'extenseur commun). La dénomination d'extenseur „propre" lui paraît devoir être rejetée, et il en donne les raisons. Il est vrai que ces extenseurs latéraux, accessoires, se caractérisent par une grande variabilité, de sorte que l'état en est souvent très différent chez des espèces du même genre, et que même des animaux de la même espèce tantôt possèdent et tantôt ne possèdent pas un extenseur „propre" d'un doigt. Nous avons aussi vu précédemment combien varie le muscle indicateur de l'homme (un des latéraux de Gratiolet, ou du système oblique chez l'homme), lequel peut même manquer entièrement. Les figures de Gratiolet montrent toutefois clairement qu'à l'état ordinaire, chez son Chimpanzé, les muscles isolés, l'extenseur propre du pouce et l'extenseur propre de l'index, sont situés précisément comme dans l'homme, et que les autres muscles du pouce ressemblent aussi tout à fait à leurs analogues humains. Or, qu'est-ce qu'un pareil système d'organes moteurs propres peut signifier pour le pouce „entraîné dans les mouvements communs, et sans aucune liberté?" Gratiolet ne nous le dit pas, mais, après avoir d'abord diminué par son changement de nomenclature l'importance des extenseurs *propres* des doigts, il essaie de détrôner entièrement l'extenseur propre du pouce, attendu que ce muscle (*l. c.* p. 165) „grâce à l'absence d'un extenseur direct," serait situé à peu près dans la direction de l'axe de la première phalange du pouce. Cette conclusion est précédée d'une dissertation sur les muscles digitaux pairs et impairs, dont il me serait impossible de faire connaître en peu de mots le contenu vague et nébuleux, mais d'où devrait résulter que, à proprement dire, un tendon de l'extenseur commun se trouve dans l'axe de la phalange; les extenseurs propres sont alors „latéraux." — Tout cet exposé de la situation du muscle est inexact, toute l'interprétation est forcée et confuse. Et que signifie ce „grâce à l'absence d'un extenseur direct?" Ne semblerait-il pas qu'il y eût ici, en opposition à ce qui se voit dans l'homme, quelque chose d'insolite? Je sais bien que,

prise à la lettre, la phrase ne dit rien de pareil, mais je ne m'en sens pas moins obligé de faire remarquer que l'homme n'a pas non plus ce que Gratiolet appelle, assez singulièrement, un „extenseur direct;" nom qui devra sans doute signifier une bande de l'extenseur commun des doigts.

Le résultat de l'examen est donc que, en ce qui regarde les muscles extenseurs, les doigts des singes anthropoïdes sont conformés comme s'ils étaient appelés à exécuter les mouvements les plus libres et les plus subtils. Ceux qui veulent admettre que, *après* la manifestation isolée des idées créatrices des mains de singes, le système musculaire de la main humaine a été imaginé à son tour et approprié à sa fin, par l'agence seule de l'idée directrice totale de la formation de l'homme, ou de concert avec cette idée, ceux-là doivent en même temps attribuer à cette influence formatrice la malicieuse propriété de construire les muscles extenseurs de la main du singe et de la main de l'homme — destinées à des usages si prodigieusement différents — tout juste comme si l'une pouvait provenir de l'autre par des modifications extrêmement légères et par l'usage même. Mais l'anatomiste qui aura su se tenir à l'abri des erreurs d'observation et de raisonnement devra convenir, ce me semble, que tout plaide en faveur d'un développement progressif, par lequel la main de l'homme et celle des singes seraient dérivées d'une souche commune. La plus haute intelligence humaine, si elle voulait rendre une main de singe apte seulement à saisir des branches et à cueillir des fruits, la construirait probablement sur un plan plus simple; tandis que, pour atteindre aux fins supérieures, elle aurait peut-être donné à la main humaine une organisation plus différente de celle du Chimpanzé — et plus parfaite.

Après tout ce qui précède, je crois pouvoir formuler les quatre propositions suivantes:

1°. Le système des muscles extenseurs, tant droits qu'obliques, des doigts de l'homme se trouve, au moins en germe, chez tous les Mammifères; à mesure qu'on s'élève dans cette classe, et que les doigts (et les orteils) se perfectionnent, il se développe et se différencie davantage.

2°. Dans les ordres supérieurs (chez le singe et chez l'homme), le muscle indicateur et le long extenseur du pouce (deux des principaux représentants du système originairement commun des muscles obliques des doigts) deviennent de plus en plus indépendants.

3°. Là où le pouce est moins libre, il existe encore, surtout entre les tendons des deux muscles susdits, une connexion, qui ne disparaît entièrement que chez l'homme.

4°. Comme effet d'atavisme, le muscle indicateur présente quelquefois de nouveau, outre un groupe d'autres variétés, la connexion de son tendon avec celui du long extenseur du pouce.

Les deux premiers points me paraissent suffisamment élucidés; le quatrième ne demande pas non plus de longs commentaires, surtout si l'on peut établir que chez les singes inférieurs, et peut-être même encore chez les anthropoïdes, il y a plus de connexion tendineuse entre les muscles du pouce et de l'index que chez l'homme.

Quant aux membres antérieurs du Gorille ou du Gibbon, on n'a pas journellement l'occasion de les étudier, et ni les descriptions ni les figures données par Bischoff, Gratiolet, etc. ne montrent clairement quel est, sous le rapport en question, l'état des tendons chez les singes les plus élevés. En revanche, grâce à l'obligeance de M. Hoffmann, j'ai pu disséquer les membres antérieurs du *Potto* et du *Cercopithecus cynomolgus*, et par là me former aussi une opinion propre sur les détails mentionnés, dans les traités et les monographies, au sujet des autres muscles des membres antérieurs des singes.

Or, j'ai parfaitement constaté chez le *Cercopithecus cynomolgus*,

— dont les doigts, tout en étant aptes à des mouvements isolés, sont pourtant, à raison de la manière de vivre de l'animal, ordinairement mus ensemble, — que les tendons du muscle extenseur commun sont unis entre eux beaucoup plus que chez l'homme, et qu'ils forment une espèce d'expansion aponévrotique, dans laquelle les quatre tendons apparaissent comme des bandes plus épaisses et plus indépendantes. Tandis que chez les singes anthropoïdes le système des extenseurs obliques des doigts est, comme chez l'homme, développé en muscles distincts, de sorte qu'on y trouve un extenseur du pouce et un extenseur de l'index entièrement indépendants, le *Cercopithecus* présente encore un état moins différencié. Dans mes préparations, voici ce que j'observe : l'extenseur commun naît, de même que chez l'homme, du condyle externe de l'humérus et forme un corps musculaire dirigé parallèlement à l'axe longitudinal de l'avant-bras ; au-dessus du carpe il se transforme en un tendon, qui passe dans une gaîne du ligament armillaire et constitue ensuite, sur le dos de la main, l'expansion aponévrotique dont j'ai parlé ci-dessus. Pendant que le corps de ce muscle descend le long de l'avant-bras, il s'y joint un autre muscle, de même force, qui, né de la face du cubitus tournée vers l'axe de l'avant-bras, ainsi que du ligament interosseux, se dirige par des fibres obliques vers le muscle précédent, passe sous lui au niveau du carpe et se réunit alors en partie avec lui. Une fusion complète n'a pourtant pas lieu ; on voit ce système musculaire oblique passer *aux tendons de l'index et du pouce*, lesquels restent distincts des tendons de l'extenseur commun. C'est surtout le tendon destiné au pouce qui, dans sa divergence vers le pouce, garde entièrement son indépendance. Si l'on tire transversalement, d'un côté ce dernier tendon, et de l'autre côté le feuillet aponévrotique de l'extenseur commun des doigts, on voit qu'ils sont unis entre eux par une mince expansion aponévrotique, sur laquelle s'étendent les dernières ramifications des nerfs superficiels de la peau. Le tissu connectif lâche, qui occupe cette région chez l'homme, ne se trouve ici qu'en très petite quantité.

Ainsi que je l'ai déjà dit, il m'est impossible d'indiquer exactement l'état que les parties décrites offrent chez les singes anthropoïdes. Mais, pour la question que nous nous sommes posée, il importe relativement peu que les tendons du muscle indicateur et du long extenseur du pouce soient devenus encore plus indépendants, et que par suite l'état de ces muscles affecte un caractère plus humain, ou bien que cet état se rapproche davantage de ce qu'il est chez le Cercopithèque.

Je noterai encore sommairement une particularité qui, à ma connaissence, n'a pas été spécialement étudiée jusqu'ici; elle consiste en ce que la couche oblique et profonde des extenseurs des doigts du *Cerpicothecus cynomolgus*, dans la gaîne du ligament armillaire, est rattachée par de fortes bandes à cette gaîne ainsi qu'aux ligaments sous-jacents du carpe, ce qui rend probable que le muscle contribue aussi à l'extension générale de la main, outre qu'il étend le pouce et l'index. Dans cette dernière direction, le muscle peut évidemment se „différencier" encore davantage, comme nous le voyons chez les singes anthropoïdes.

Des deux autres représentants de la couche oblique ou profonde des muscles extenseurs des doigts, le court extenseur du pouce et le long abducteur, je n'ai rien dit, tant pour abréger, que parce qu'ils n'ont aucun rapport direct avec l'anomalie du muscle indicateur que j'ai décrite. Je mentionnerai seulement que ces deux muscles sont bien développés chez le Cercopithèque, et qu'ils s'y montrent déjà beaucoup plus spécialisés que le long extenseur du pouce et l'indicateur.

La question que je m'étais posée me semble maintenant résolue d'une manière satisfaisante. *Les mêmes formes fondamentales des muscles extenseurs des doigts se rencontrent partout*, *et ce fait*

donne l'explication des théromorphies de l'homme, notamment de celle observée par moi. Ce point éclairci, une seconde question se présente d'elle-même: peut-on trouver dans les particularités physiologiques de l'espèce animale la cause déterminante par laquelle les mêmes matériaux se développent sous des formes différentes, déterminées et ne variant, çà et la, qu'entre les limites de la communauté de race? Cette question, sur laquelle je n'ai pas à m'étendre ici, constitue un sujet d'investigation difficile, mais attrayant. Il faudrait commencer par introduire l'ordre et la lumière dans le chaos des opinions touchant l'homologie des membres antérieurs et postérieurs. Parmi beaucoup d'autres idées remarquablement discordantes, je rappellerai, comme exemple de l'obscurité qui règne en cette matière, qu'aujourd'hui on peut encore défendre, par des raisons en apparence plausibles, l'analogie fondamentale entre les muscles qui s'insèrent à la rotule et ceux qui fléchissent l'avant-bras (Albrecht), tandis qu'à première vue la rotule et l'olécrâne du cubitus semblent être des parties complétement homologues.

Le terrain déblayé sous ce rapport, il y aurait ensuite à étudier chez les Mammifères, dans l'ordre descendant, les mouvements si remarquables de la main connus sous le nom de pronation et de supination. Le mécanisme du radius et du cubitus, la position de l'humérus, la question embrouillée de la „torsion" de cet os, devraient être tirés au clair, et — la signification génétique des deux systèmes de muscles extenseurs des doigts, le droit et l'oblique, apparaîtrait alors dans un jour beaucoup plus vif que celui que j'ai pu projeter sur elle de mon point de vue borné. Le court supinateur, le plus remarquable des muscles antibrachiaux obliques, dont je n'ai fait aucune mention, parce qu'il est bien en relation avec le mouvement de la main prise dans son ensemble, mais non avec celui des doigts, ce muscle devrait alors, — conjointement avec les extenseurs considérés par moi et avec les autres muscles analogues qu'on trouve, à l'état plus ou moins indépendant, chez l'homme ou les Mammifères inférieurs, — être dérivé de mouvements spéciaux,

progressivement développés, des membres antérieurs. On reconnaîtrait ainsi que ces muscles devaient nécessairement prendre une direction de plus en plus oblique par rapport à ceux qui restaient parallèles à l'axe de l'avant-bras.

Utrecht, Janvier 1879.

Remarque. Pour la question de l'influence que l'usage des parties (et par suite l'habitude et l'hérédité) peut avoir sur des particularités de forme et de structure, il y a, ce me semble, quelque intérêt dans le fait que, à ma propre main, les bandes tendineuses anomales ne sont arrivées au grand développement qu'elles présentent aujourd'hui, qu'après la maladie de la main et du bras. L'ankylose du carpe et les adhérences des tendons des muscles extenseurs, entre eux et avec les parties voisines (le long du tendon de l'extenseur long du pouce il est resté au-dessus de l'articulation carpienne une longue cicatrice, après l'incision pratiquée pour laisser écouler le pus de la gaîne du tendon), ont naturellement modifié les conditions mécaniques de l'action des muscles extenseurs. Qu'il dût en résulter une augmentation de force de mon muscle indicateur et une action plus énergique sur la bande tendineuse déjà existante mais peu développée qui se rendait au pouce, c'est là une conséquence qui, sans pouvoir être prouvée mathématiquement, est certes très concevable d'une manière générale. Aujourd'hui, cette bande constitue un vrai petit tendon rond, qui est fortement tendu par l'indicateur lors de l'extension soit de la première soit de la seconde phalange du pouce; ce muscle vient ainsi puissamment en aide à l'extenseur long du pouce, qui est très affaibli. Voilà comment, lorsque notre connaissance et notre intelligence

des faits sont suffisantes, la conception téléologique se confond avec l'explication génétique, ou est rendue superflue par cette dernière.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

A. Muscle extenseur long du pouce.

B. Muscle indicateur. Pour le rendre visible, on a écarté le muscle extenseur commun des doigts.

C. Tendon du muscle extenseur radial long du carpe.

SUR LES

PREMIERS PHÉNOMÈNES DE LA GERMINATION DES SPORES DES CRYPTOGAMES,

PAR

N. W. P. RAUWENHOFF.

Ayant entrepris sur la génération sexuée des Gleichéniacées un travail étendu, dont je compte pouvoir bientôt publier les résultats [1]), j'eus naturellement à étudier aussi la structure des spores avant et pendant la germination.

Certains faits particuliers, que je rencontrai dans cette étude, m'engagèrent à étendre mes investigations à d'autres plantes, et, à la suite de ces recherches, j'ai été conduit à penser que les opinions actuelles au sujet de la première formation des prothalles doivent être légèrement modifiées.

Les spores des différentes espèces de Fougères possèdent généralement une paroi composée de plusieurs couches, qui présentent des différences physiques et chimiques plus ou moins prononcées. La plupart des auteurs distinguent une moitié externe et une moitié interne, une *exospore* et une *endospore* (appelées aussi quelquefois *exine* et *intine*, par analogie avec les grains de

[1]) J'en ai déjà donné, sur quelques points, un aperçu préliminaire dans les séances de l'Académie d'Amsterdam des 27 Janv. et 30 Juin 1877 (voir les Procès-verbaux de ces séances), ainsi qu'au Congrès botanique international tenu, en Avril 1877, à Amsterdam.

pollen), dont la première est dans certains cas encore recouverte, en tout ou en partie et pendant plus ou moins longtemps, par une membrane particulière, l'*épispore* (ou la *périspore* de Tschistiakoff). Mais souvent aussi on désigne sous le nom d'*épispore* simplement la couche extérieure de l'exospore, lorsque cette couche se distingue plus ou moins nettement, au premier coup d'œil, de la couche sous-jacente.

L'exospore est parfois colorée, souvent en brun, et sa surface est ornée, dans différentes familles et différents genres de Fougères, de dessins très caractéristiques, formés de bandes, de bosses et de pointes saillantes, dessins qui ont une certaine importance dans les cultures, comme moyens de reconnaître les espèces.

En raison du mode de production des spores dans les cellules mères, qui, à la suite d'une quadripartition ou de bipartitions répétées, montrent les cellules filles tantôt placées aux angles d'un tétraèdre, tantôt situées dans un même plan, les spores développées présentent ordinairement la forme ou bien d'un segment sphérique uni à une pyramide triangulaire (dont les trois faces au sommet sont les plans de jonction avec les trois cellules sœurs nées de la même cellule mère), ou bien d'un petit haricot ou d'un corps réniforme. Dans le premier cas, les arêtes des faces en question deviennent autant de côtes, qui concourent en un même point (le sommet de la pyramide), point où s'ouvre normalement la paroi de la spore au moment de la germination. Dans le second cas, on ne voit qu'une seule côte, au côté intérieur de la spore, et c'est encore en cet endroit que la paroi offre le moins de résistance, lorsque commence la germination. A l'exemple de M. Russow (*Vergleich. Untersuch.* p. 88), on donne maintenant d'ordinaire le nom de spores *radiaires* aux spores de la première espèce, et celui de spores *bilatérales* à celles de la seconde espèce.

Quand les spores commencent à germer, on les voit d'abord se gonfler plus ou moins (parfois très peu, si l'exospore est dure et épaisse) en absorbant de l'eau; puis, après un espace de temps très variable pour les différentes espèces de Fougères,

la paroi se déchire au point de réunion des trois côtes de la spore radiaire, ou au milieu de la côte unique de la spore bilatérale.

Par l'ouverture, la masse interne sort sous la forme d'une papille, qui bientôt grossit comme une jeune cellule à contenu de protoplasme et de chlorophylle, et qui porte, soit d'emblée soit après un temps assez court, une seconde papille représentant un poil radical, ou rhizoïde. Ces deux cellules, la première cellule du prothalle et la première cellule radicale, croissent et changent chacune à sa manière, selon le mode décrit en détail par beaucoup d'auteurs pour différents groupes de Fougères.

L'opinion courante au sujet de la première production du prothalle revient maintenant, en général, à ceci: Au début de la germination, l'exospore se fend; l'endospore, devenue libre, apparaît au dehors et constitue la paroi de la première cellule du prothalle, quelquefois aussi celle du premier rhizoïde; le contenu de la spore forme le contenu de ces deux cellules, et il fournit même le contenu d'un plus grand nombre de cellules dans le cas où des divisions ont eu lieu avant la rupture de l'exospore ou du moins avant que l'endospore se montre bien distinctement au jour. C'est ainsi, par exemple, qu'on lit dans Sachs (*Lehrbuch der Bot.*, 4e éd., p 416): „Quand la spore commence à germer, . . . l'exospore cuticularisée . . . . . se déchire le long de ses arêtes. L'endospore, qui s'échappe au dehors et où il n'est pas rare d'apercevoir déjà des cloisons, produit le prothalle, soit directement comme dans l'*Osmunda*, soit en formant d'abord un proembryon filamenteux, etc." Et dans Luerssen (*Grundzüge der Botanik*, p. 235): „Chez les Hyménophyllacées, les spores commencent souvent déjà à germer dans la capsule, et les premières divisions ont lieu pendant que la spore est encore fermée, de sorte que, au moment où l'exospore est rompue par l'endospore, *qui forme seule le proembryon*, celui-ci est déjà constitué par trois ou quatre cellules. Dans tous les autres cas, l'endospore par son expansion fait éclater l'exospore, ... et apparaît au dehors sous la forme d'une papille, qui s'allonge en tube, etc."

Dans son ouvrage le plus récent, dont le tome 1er a seul paru jusqu'ici (*Medicin.-Pharm. Botanik*, p. 554), M. Luerssen dit encore: „La spore, placée sur la terre humide, se gonfle ordinairement plus ou moins, en absorbant de l'eau, avant que l'endospore fasse éclater . . . . l'exospore. Ici, comme dans les Muscinées, *la première seule se développe en prothalle* . . . . Par sa partie tournée vers le sommet de la spore, elle se montre à l'extérieur . . . . sous la forme d'une papille épaisse et obtuse, ... et s'allonge en un tube, à l'extrémité duquel elle accumule, avec le noyau cellulaire, la plus grande partie de la masse plasmique." [1])

Les vues ainsi exposées dans les traités généraux sont d'ailleurs en parfaite harmonie avec les descriptions que donnent, au sujet de l'acte de la germination, les mémoires spéciaux. Pour ne citer que quelques-uns des auteurs les plus récents, on lit dans Pedersen (*Mitth. a. d. Gesammtgeb. d. Botan.* v. Schenk u. Luerssen, II, p. 130): „Après la rupture de l'exospore, l'endospore s'allonge et se partage ensuite par une cloison transversale en deux nouvelles cellules, etc."; dans Bauke (*Jahrb. f. wiss. Batan.* X, p. 59): „Dans la germination des Cyathéacées, la spore, déchirée à la partie trièdre, laisse sortir le jeune prothalle sous la forme d'une protubérance de l'endospore;" dans Burck (*Archives*

[1]) Chez des auteurs différents, parfois chez un même auteur et dans le même ouvrage, le mot *endospore* reçoit deux acceptions différentes, ce qui peut donner lieu à confusion. Par ce mot, en effet, on désigne tantôt la tunique interne de la paroi de la spore, tantôt la masse entière (paroi et contenu) de la spore, sauf l'exospore. Dans le passage ci-dessus cité de Sachs et dans celui de Luerssen (*Grundzüge*), le mot ne peut avoir que la seconde de ces deux significations. Il en est de même quand on lit dans Goebel (*Bot. Zeit.*, 1877, p. 673): „L'endospore renferme, ici aussi, de la chlorophylle, etc." Par contre, dans le même ouvrage de Sachs (*Lehrb.* 4e éd., p. 33) l'endospore est définie comme „l'ensemble des couches internes" de la paroi des spores. Le mot présente la même signification dans Tschistiakoff (*Ann. d. sc. nat.*, 5e sér. XIX, p. 226, et *Bot. Zeit.*, 1875, p. 3) et dans Luerssen (*Mitth. a. d. Gesammtgeb. d. Bot.* v. Schenk u. Luerssen, I, p. 462), etc. Partout où le mot *endospore* sera employé par *moi*, il désignera seulement les couches internes de la paroi de la spore.

Néerl., t. X, p. 5): „Lors de la germination, les baguettes s'écartent entre elles au centre, et forment ainsi une ouverture à travers laquelle apparaît l'endospore;" enfin dans Goebel (*Bot. Zeit.*, 1877, p. 676): „Par le sommet fendu de l'exospore s'échappe l'endospore, qui bientôt s'allonge en tube."

Le premier développement de la génération sexuée des Gleichéniacées offrant, à part quelques détails, des phénomènes extérieurs généralement semblables à ceux qu'on observe chez les autres Fougères, je m'en étais d'abord fait une idée conforme à celle qui vient d'être exposée, comme on peut le voir dans les communications préliminaires rappelées ci-dessus. Mais un examen plus attentif, spécialement de la partie microchimique, — à laquelle je fais ici les rectifications nécessaires, — vint me susciter des difficultés. Avant la germination de la spore, je ne pouvais en effet constater dans la moitié interne de la paroi, ou l'endospore, pas plus que dans l'exospore, la réaction de la cellulose; tandis que la spore, dès qu'elle commençait à germer, m'offrait immédiatement cette réaction dans la paroi de la papille apparaissant au dehors, ainsi que dans le revêtement le plus interne du contenu. Ce fait me fit douter de la justesse de l'opinion qui voit dans l'endospore en question la paroi de la première cellule du prothalle ou du premier rhizoïde. Car je ne pouvais admettre que la paroi interne de la spore mûre, déjà cuticularisée ou du moins modifiée secondairement, fût, au moment même de la germination, rajeunie en quelque sorte et ramenée à l'état de membrane cellulosique primaire et pure. Un pareil phénomène serait, à ce qu'il me semble, en opposition avec tout ce que nous savons du développement de la paroi cellulaire. Je compulsai ce qui avait été écrit sur la structure de la paroi des spores, et je reconnus que M. Fischer de Waldheim (*Pringsh. Jahrb. f. w. Bot.* IV, p. 374) et M. Kny (*Pringsh. Jahrb. f. w. Bot.*, VIII, p. 3) n'avaient pas non plus pu obtenir, dans l'*Osmunda*, la coloration bleue de l'intine; que M. Tschistiakoff (*Ann. d. sc. nat.* 1874, XIX, p. 226, et *Bot. Zeit.*, 1875, p. 2) dans les *Angiopteris* et les *Polypodiacées*, M. Jonkman

(*Bot. Zeit.*, 1878, p. 134) dans les *Angiopteris* et les *Marattia*, et M. Bauke (*Pringsh. Jahrb.*, X, p. 59) dans les *Cyathéacées*, avaient au contraire trouvé la réaction de la cellulose dans l'endospore; enfin, que MM. Luerssen, Pedersen, Burck et d'autres n'avaient fait aucune mention de la nature chimique de l'endospore. En réalité, dans la plupart des recherches sur la germination des spores, l'attention s'était portée plutôt sur le côté morphologique que sur le côté physiologique de la question, et les premiers changements survenus dans la spore elle-même avaient été négligés ou décrits seulement d'une manière sommaire.

Je résolus donc d'étudier avec un peu plus de soin le développement des spores de *Gleichenia*, en le comparant avec celui d'autres Fougères. Les principaux résultats de cette étude sont les suivants:

Les spores du genre *Gleichenia*, dans lequel j'ai examiné les espèces *Gl. hecistophylla*, *Gl. rupestris* (voir Pl. VIII, fig. 1 et 2), *Gl. Mendelli*, *Gl. microphylla*, *Gl. semivestita*, *Gl. circinnata*, *Gl. speluncae*, *Gl. dicarpa* et *Gl. flabellata*, appartiennent, à l'exception de cette dernière espèce, qui contient des spores bilatérales (voir fig. 14 et 15), au type radiaire. Elles offrent une paroi parfaitement incolore et transparente, et, outre les trois côtes bien connues (une seule dans le *Gl. flabellata*), elles ne possèdent pas d'autres sculptures ou épaississements que trois bandes ou bourrelets assez larges (fig. 2, 3, 4, *b*, *b*, *b*,) également incolores et lisses, qui font saillie à l'extérieur et qui s'étendent, à peu près au niveau de l'équateur de la spore, entre les extrémités de deux côtes voisines, sans toutefois toucher celles-ci en aucun point. Ces bourrelets se présentent donc, lorsque la spore est couchée sur sa face convexe ou sphérique, sous la forme d'un triangle équilatéral à angles non fermés, qui circonscrit les trois côtes. Sur les spores du *Gl. flabellata*, il y a deux de ces bourrelets, parallèles à la côte unique, un de chaque côté et tout près de cette côte (fig. 16, 17).

Quand on fait de la manière ordinaire (c'est-à-dire, après avoir inclus les spores dans de la gomme mêlée d'un peu de sucre de

canne et les avoir laissées sécher) des coupes de ces spores, on trouve leurs parois composées de plusieurs couches: Une couche externe, mince, qu'on pourrait appeler *épispore* (fig. 9, *ep.* [1]); une couche moyenne, plus épaisse, l'*exospore* (fig. 9, *ex.*), qui est surtout très développée à l'endroit où se trouvent les bourrelets, endroit où elle montre quelquefois nettement des strates distinctes, qui sont intimement unies entre elles, mais diffèrent probablement par leur teneur en eau; enfin, une couche interne, qui porte ordinairement le nom d'*endospore* (fig. 9, *end.*). Toutes ces couches, assez adhérentes l'une à l'autre, offrent beaucoup de résistance aux réactifs et ne se gonflent que peu ou point. Sous l'influence de la potasse concentrée, elles jaunissent; avec l'acide sulfurique concentré, elles pâlissent, et quand l'action se prolonge elles deviennent brun-violet, sans perdre leurs limites arrêtées; l'iode est très peu absorbé par l'exospore, un peu plus par l'endospore. En présence du chlorure de zinc iodé, ou de l'iode et de l'acide sulfurique, la couleur devient jaune brunâtre, non seulement en ce qui concerne l'exospore, comme cela est le cas ordinaire pour les spores des Fougères, mais aussi en ce qui regarde l'endospore. Même après le traitement préalable par la potasse ou par l'acide nitrique, je n'ai pu provoquer, ni dans l'exospore, ni dans l'endospore, la coloration bleue caractéristique.

Le contenu de la spore saine et non germée (soit sèche, soit recouverte d'eau distillée ou, ce qui vaut encore mieux, d'une solution de sel marin au $\frac{1}{200}$) est coloré en jaune vif, presque en jaune d'or (voir fig. 1 et 2). La spore est entièrement remplie d'une masse fortement réfringente, dans laquelle on distingue quelques globules de différentes grosseurs, et un gros noyau clair, qui se trouve presque toujours exactement sous le point de rencontre des trois côtes, ou, chez le *Gl. flabellata*, sous le

[1]) A moins qu'on ne réserve ce nom à l'enveloppe, parfois absente, qui paraît devoir être regardée comme un reste de la cellule mère de la spore (voir Tschistiakoff, *Ann. d. sc. nat.*, 5_e sér., XIX, p. 225 et 227, Jonkman, *Bot. Zeit.*, 1878, p. 134), auquel cas la couche externe en question formerait une partie de l'exospore.

milieu de la côte unique. L'examen microchimique montre que ce contenu cellulaire est formé en partie de matières albuminoïdes, qui sont colorées en rouge par le réactif de Millon (fig. 8), et en partie de globules gras ou huileux; on y trouve en outre une matière qui affecte la forme de grumeaux irréguliers, très réfringents, lorsque, sous l'action d'une faible pression, le contenu de la spore est évacué et se répand dans le liquide ambiant; matière qui a quelquefois une certaine analogie d'aspect avec les cristalloïdes, mais qui ne se colore pas par le réactif de Millon, et dont je n'ai pu reconnaître jusqu'ici la nature chimique.

Telle est la composition de la spore non germée.

Cette spore étant maintenant semée sur la terre humide, et maintenue à une température et dans un état d'humidité convenables, on voit au bout de quelques jours, longtemps avant que la paroi ne s'ouvre, s'opérer, comme premiers phénomènes de la germination, d'importants changements dans le contenu de la spore; changements faciles à observer, vu la parfaite transparence de la paroi. La forme extérieure de la spore ne subit pas de modification sensible; du reste, la paroi ou coque dure ne paraît pas susceptible de se gonfler, comme le prouvent déjà les réactions indiquées ci-dessus. Le contenu, d'abord encore jaune foncé, change graduellement un peu de couleur, une teinte verte venant se mêler au jaune (fig. 3). Les grands globules gras paraissent se partager en d'autres beaucoup plus petits, de sorte que, si à ce moment on fait éclater la spore par pression, on voit nager dans le liquide ambiant une foule de petits globules incolores, entre lesquels se trouvent, en nombre plus ou moins considérable, des corpuscules verts extrêmement petits, de forme ordinairement globuleuse. Il s'est donc déjà formé de la chlorophylle, matière dont on n'apercevait pas trace dans la spore non germée. Le noyau de la cellule devient peu à peu moins distinct et quelquefois disparaît entièrement dans la masse opaque. Çà et là, toutefois, j'ai vu le noyau changer de forme, devenir polyédrique et émettre des prolongements filamenteux, ou pseudopodes; exceptionnelle-

ment j'ai aussi aperçu dans le noyau modifié deux nucléoles (fig. 6), et plus tard j'ai alors trouvé dans ces spores, après la contraction du contenu, deux noyaux, chacun plus petit que le noyau primitif. Le contenu prend ensuite de plus en plus un aspect verdâtre et finement granuleux; les globules de graisse diminuent en quantité; si les spores parvenues à ce stade sont traitées par le chlorure de zinc iodé, on y découvre une multitude de grains excessivement petits de fécule, sous la forme de points noir bleuâtre, qui se trouvent surtout près du contour de la spore (fig. 6).

Le changement paraît maintenant commencer aussi dans la paroi. Lentement, au point de réunion des trois côtes, les trois valves s'écartent un peu l'une de l'autre.

Si alors on fait de nouveau agir le chlorure de zinc iodé, on trouve distinctement une paroi de cellulose formée autour du contenu de la spore. Cette nouvelle paroi, extrêmement mince, est étroitement appliquée à la paroi primitive de la spore, sauf à l'endroit où les valves s'écartent et où elle apparaît nettement comme limite d'une papille (fig. 10). Aussi est-ce seulement en cet endroit que, sur la spore vivante et s'ouvrant sous l'eau, on peut reconnaître la nouvelle paroi. Mais lorsque la spore a été traitée, comme il vient d'être dit, par le réactif de Schultze, et surtout lorsqu'il n'y a pas eu préalablement addition d'eau, on ne voit pas seulement le contenu se contracter et se colorer, mais on voit aussi la nouvelle paroi détachée de la paroi de la spore et constituant autour du contenu contracté un petit sac membraneux très mince, coloré en bleu clair (fig. 10, 11, 12, 13). J'ai observé ce phénomène dans différentes espèces de *Gleichenia*, et je l'ai retrouvé aussi chez d'autres Fougères, dont les spores n'avaient pas des parois trop opaques; les grandes spores de *Ceratopteris thalictroides*, entre autres, le montraient très nettement. Chez les *Gleichenia*, on constate en outre qu'il y a déjà eu, à ce moment, partition cellulaire dans la spore. Le contenu contracté s'est divisé en deux parties, dont chacune est parfois pourvue d'un noyau, et entre lesquelles s'est formée

une cloison, ordinairement perpendiculaire à la direction de l'accroissement futur.

Dans les cas favorables, cette cloison de segmentation est déjà visible sans l'action du chlorure de zinc iodé; mais, à la suite de l'emploi de ce réactif, elle apparaît comme une ligne bleue déliée, qui se rattache à la cloison cellulosique nouvellement formée. Une pareille division cellulaire, effectuée dans la spore même, n'a du reste rien d'extraordinaire. Kny l'a décrite pour *Ceratopteris* (*Die Parkeriaceen*, p. 9, Pl. I, fig. 3), Prantl pour *Trichomanes* et *Hymenophyllum* (*Die Hymenophyllaceen*, p. 41); pour *Ceratopteris* j'ai vérifié l'observation de M. Kny.

Voici donc comment je conçois le premier stade de la germination des spores: Ce n'est pas la couche interne de la paroi primitive de la spore, couche ordinairement appelée intine ou endospore, qui devient la paroi de la première cellule du prothalle ou du premier rhizoïde; mais, aux dépens du contenu protoplasmique, se constitue, avant la déchirure de la spore, une nouvelle paroi de cellulose, qui, par suite de la turgescence de la cellule, s'applique étroitement à la paroi interne de la spore. La formation de cette membrane cellulosique aux dépens du protoplasme se fait de la manière ordinaire, telle qu'elle a été décrite en détail par Hofmeister, Strasburger, etc.

Une fois formée, la paroi de cellulose s'accroît comme d'ordinaire par intussusception, et apparaît, lorsque la spore s'est ouverte, sous forme de papille. Après ce moment, elle peut d'ailleurs encore se développer beaucoup, témoin les spores germées d'*Angiopteris* et de *Marattia* (Luerssen, *Mitth. a. d. Ges. Bot.*, I, p. 330, Jonkman, *Bot. Zeit.*, 1878, p. 136), où la première cellule surpasse 5—10 fois en grandeur le contenu de la spore elle-même. A l'intérieur de cette première cellule il s'opère bientôt (soit avant l'ouverture de la spore, soit un peu plus tard) des divisions par des cloisons de cellulose, après segmentation préalable du noyau cellulaire.

Cette manière de voir est contraire à l'opinion généralement admise et rappelée ci-dessus (p. 349), suivant laquelle l'endospore

constituerait la paroi de la première cellule du prothalle; mais elle est, je crois, plus conforme à la vérité. Elle s'appuie, en effet sur des recherches spécialement dirigées vers les changements que le contenu de la spore éprouve au début de la germination, ce qui n'a pas toujours été le cas pour l'autre opinion. Les auteurs qui ont écrit sur la germination glissent en général sur ces premiers changements, ou bien ils les regardent comme semblables à ceux que présentent les grains de pollen. Chez deux d'entre eux seulement, je trouve une expression qui pourrait faire supposer une interprétation analogue à la mienne. C'est ainsi que M. Kny dit, par rapport à *Osmunda* (*Pringsh. Jahrb. f. w. Bot.*, VIII, p. 4): „*cellule de la spore entourée par l'intine* fait maintenant saillie à travers la fente, sous la forme d'une papille conique arrondie;" et M. Prantl, par rapport à *Trichomanes speciosum* (Prantl, *Die Hymenophyllaceen*, p. 41): „Le premier changement que subit la spore est la rupture de l'exospore aux trois arêtes du sommet, rupture causée par l'accroissement de volume de la *cellule enveloppée par l'endospore*, dans laquelle s'ordonne aussi le contenu plasmique, et où des grains de chlorophylle se séparent de la masse primitivement d'un vert uniforme". Ces expressions sont toutefois équivoques, car il reste douteux si par le mot „cellule" il faut entendre la cellule entière, avec une nouvelle paroi de cellulose, ou bien le contenu, ayant pour paroi l'endospore.

L'origine de l'opinion régnante est d'ailleurs facile à trouver. Les spores des Cryptogames vasculaires et les grains de pollen ont toujours été mis sur la même ligne. Pour les unes et les autres, le développement par quadripartition des cellules mères respectives et la formation des différentes couches de la paroi sont effectivement si analogues, que non seulement ces couches ont été désignées par quelques-uns (tels que M. Kny) sous les mêmes noms, exine et intine, mais qu'il était aussi tout naturel d'admettre la même marche dans les phénomènes vitaux ultérieurs des organes en question. M. Sachs, par exemple, dit (*Lehrb. d. Bot.*, 4e éd. p. 21): „les grains de pollen déve-

loppent plus tard leurs tubes, les spores germent, et dans les deux cas l'accroissement se localise sur une certaine région de la couche interne de la membrane," et plus loin (p. 35): „Dans la germination de beaucoup de spores (*Spirogyra*, Mousses, etc.), l'exospore cuticularisée se déchire et se sépare entièrement de l'endospore qui continue son développement; le mode de formation de ces deux enveloppes montre cependant qu'elles ne sont, comme l'exine et l'intine des grains de pollen, que deux systèmes de couches d'une seule et même membrane ayant acquis des propriétés physico-chimiques différentes." Dans la grande majorité des cas d'ailleurs, l'opacité de la paroi des spores ou les sculptures variées dont elle était couverte ne permettaient pas de démêler convenablement les changements de son contenu, et par suite on s'est contenté de supposer tacitement, ou du moins sans vérification sérieuse, que les choses se passaient dans la germination tout comme dans la formation des tubes polliniques.

L'étude directe montre toutefois, ainsi que nous l'avons vu plus haut, que cette supposition n'est pas fondée. Dans le contenu de la spore germante il se fait, avant que la spore ne s'ouvre, un changement remarquable, accompagné de la formation d'une nouvelle paroi de cellulose. Mais l'existence de cette paroi ne se révèle que lorsque l'exospore et l'endospore sont transparentes et incolores, de manière à rendre possible l'observation des modifications survenues dans le contenu de la spore. Ce cas favorable est précisément celui des Gleichéniacées. Je pense toutefois que le mode de développement des spores dans les autres familles de Fougères, où il ne peut être suivi pas à pas, est conforme à celui que nous montre ce cas, au lieu d'être assimilable au mode de formation des tubes polliniques. Non seulement, en effet, ces plantes ont dans toute leur organisation une affinité beaucoup plus grande avec les Gleichéniacées qu'avec les Phanérogames; non seulement les spores des Cryptogames vasculaires ont une signification morphologique et physiologique différente de celle des grains de pollen; mais les observations et les considérations suivantes, qui tendent à confirmer mes vues, sont

applicables aussi aux spores de la plupart des autres Fougères.

Lorsqu'on pratique des coupes de grains de pollen encore fermés, comme l'ont fait Schacht (*Pringsh. Jahrb. f. w. Bot.*, II, p. 110), Luerssen (*Pringsh. Jahrb.*, VII, p. 34) et Tschiskiakoff, (*Pringsh. Jahrb.* X, p. 7), et qu'on opère de même sur des grains qui ont déjà laissé sortir le tube pollinique, on voit, fait connu, que la paroi de ce dernier est formée de l'intine, et en comparant les deux coupes on trouve que la paroi du grain de pollen, à l'endroit où se sépare l'intine, est composée de moins de couches qu'ailleurs, c'est-à-dire, uniquement de l'exine. Or, si l'on examine de la même manière des coupes de spores non germees et de spores germées, on constate que les valves ouvertes de ces dernières ont la même épaisseur et sont composées du même nombre de couches qu'avant la germination, alors qu'elles étaient encore fermées. La paroi de la papille qui apparaît entre les valves est donc une paroi nouvelle, et non l'une des couches de la paroi primitive de la spore, comme c'est le cas pour la paroi du tube pollinique, qui est constituée par une portion de la paroi primitive du grain de pollen.

En second lieu, la modification que le contenu des spores subit lors de la germination est tout autre, et beaucoup plus profonde, que celle de la fovilla lors de la formation des tubes polliniques. A la vérité, notre connaissance de la fovilla est encore très peu développée sous ce rapport, et se réduit essentiellement à ceci, qu'outre les matières albuminoïdes on y trouve souvent de la fécule et de l'huile, et qu'une portion plus ou moins grande de la fovilla passe du grain de pollen dans le tube. Mais ce peu nous montre déjà une grande différence entre la fovilla et le contenu protoplasmique de la spore. D'une formation de chlorophylle, telle qu'on la voit dans celle-ci, et surtout d'une division cellulaire, telle que je l'ai trouvée dans la spore de *Gleichenia* et telle que nous l'offre aussi l'*Osmunda* et à un degré encore plus prononcé le *Ceratopteris*, de tout cela il n'y a pas trace dans la fovilla, abstraction faite des noyaux cellulaires rencontrés dans les tubes polliniques de quelques Gymnospermes.

Enfin, l'intine consiste toujours en cellulose [1]), et cette membrane est parfois, entre autres chez les Onagrariacées (voir Schacht, *l. c.*, et Tschistiakoff, *Pringsh. Jahrb. f. wiss. Bot.*, X, p. 10), pourvue d'épaissements spéciaux à l'endroit où sortira le tube, de sorte que la matière de la paroi de celui-ci est déjà en quelque sorte préformée et accumulée dans le grain de pollen. Sur les spores des Gleichéniacées, je n'ai jamais pu produire dans l'endospore la coloration bleue par le chlorure de zinc iodé, et, pas plus que M. Kny, je n'ai pu l'obtenir sur les spores de *Ceratopteris thalictroides*. M. Kny ne l'a pas observée non plus chez l'*Osmunda*. Par contre, M. Bauke (*Pringsh. Jahrb. f. w. Bot.*, X, p. 59) décrit l'endospore d'*Hemitelea* comme formée de cellulose, et M. Tschistiakoff (*Ann. d. sc. nat.*, 5e sér., XIX, p. 226) ainsi que M. Jonkman (*Bot. Zeit.*, 1878, p. 134) donnent la même composition à l'endospore d'*Angiopteris*. Quant à la nature chimique de l'endospore, il paraît donc y avoir des différences dans les spores des Fougères. A mon point de vue, toutefois, je ne crois pas devoir reconnaître à ce fait une grande importance, bien que le défaut de la réaction de la cellulose ait été l'occasion première de mes recherches. En tout cas, la circonstance que dans les spores mûres de plusieurs Cryptogames vasculaires la paroi interne n'est pas encore cuticularisée, n'est nullement contraire à l'activité que j'attribue au contenu des spores lors de la germination, pas plus que cette circonstance ne saurait affaiblir ni la valeur de mes observations sur les changements du contenu, ni les arguments que je viens de produire à l'appui de ma manière de voir.

Au contraire, cette manière de voir étant mieux que l'ancienne en harmonie avec nos idées actuelles concernant la fonction du protoplasme et du noyau dans la formation des cellules, je crois être fondé à l'appliquer aussi à des spores autres que

---

[1]) C'est seulement dans le *Mirabilis* que M. Schacht mentionne une autre composition chimique de l'intine, qui, chez cette plante, n'est pas colorée en bleu par l'iode et l'acide sulfurique.

celles des Fougères. Sous ce rapport, un intérêt spécial s'attache aux grandes Zygospores du *Spirogyra nitida*, dont le développement et la germination ont été si bien décrits et figurés, il y déjà longtemps, par M. Pringsheim (*Flora*, 1852, p. 465, 481). Pas plus que M. de Bary (*Untersuchungen über die Conjugaten*, p. 8), je ne puis, après une étude attentive du sujet, rien ajouter d'important aux résultats de ce travail. Je pense seulement que les phénomènes observés doivent recevoir aujourd'hui une autre explication qu'en 1852, parce qu'à cette époque on admettait, avec Hugo von Mohl, que la paroi cellulaire se formait par dépôt successif de plusieurs couches différentes, tandis que maintenant, à la suite des découvertes de M. Nägeli et des dernières recherches de M. Strasburger et d'autres observateurs, on professe à cet égard des idées toutes différentes. Je ne doute pas que M. Pringsheim ne soit le premier à reconnaître que l'interprétation donnée par lui en 1852 n'est plus au niveau de la science actuelle, encore que sa description des phénomènes reste parfaitement exacte. Mais cette description concorde entièrement avec la manière dont je conçois l'acte germinatif. Ecoutons M. Pringsheim lui-même. Après avoir remarqué que pour les spores de *Spirogyra*, de même que pour toutes les spores immobiles d'Algues, il s'écoule un temps considérable entre la formation et le développement (germination), il dit (p. 469): „Mais, durant cet intervalle de repos *apparent*, il règne à l'intérieur de ces germes une activité incessante, dont les manifestations à la vérité ne frappent pas immédiatement la vue, mais dont les résultats se laissent reconnaître, aussi chez les *Spirogyra*, dans les changements irrécusables du contenu et de la membrane des spores mûres". Puis, après être entré dans des détails au sujet de ces changements du contenu, il écrit (p. 470): „Plus importantes encore que les changements observables du contenu, sont les différences qu'on remarque entre la membrane des vieilles spores et celle des jeunes spores. Au lieu de la membrane unique, transparente, formée de cellulose, que possède la spore dans sa jeunesse, elle présente, peu de temps avant qu'elle ne germe,

trois membranes différentes, non soudées entre elles. La plus interne enveloppe le contenu entier, qui est entouré en outre du tube primordial.... Cette membrane interne, la dernière dans l'ordre de la formation, est incolore comme la membrane primitive, et, comme elle, bleuit au contact de l'iode et de l'acide sulfurique; dans la spore non encore ouverte elle n'est pas toujours visible, et c'est peut-être à cause de cela qu'elle a échappé jusqu'ici aux observateurs, peut-être aussi *parce que, dernier dépôt de la matière membranogène, elle n'apparaît dans la cellule que peu de temps avant la germination.* Avec le contenu qu'elle enveloppe, elle forme la partie essentielle de la spore, attendu que, lors de la germination, après la rupture et le rejet des deux membranes extérieures, elle constitue directement la jeune plante en se développant."

Je n'ai besoin de rien ajouter à ces paroles. Pourvu que l'on ne perde pas de vue que l'éveil de la vie, ou la germination, commence avant que le nouvel organisme perce son enveloppe, il est clair qu'ici, tout comme dans les spores des Fougères, le contenu métamorphosé ou, si l'on veut, rajeuni de la spore produit une paroi cellulosique propre, destinée à revêtir la première cellule qui va devenir libre.

Il en est de même des spores d'autres Conjuguées, comme on peut s'en convaincre en relisant la description si exacte donnée par M. de Bary (*Untersuchungen über die Familie der Conjugaten*, 1858). Dans le *Genicularia Spirotaenia*, par exemple, le contenu de la zygospore mûre subit peu a peu d'importantes modifications: la couleur devient plus foncée, à la place de petits grains de chlorophylle se montrent des lames de cette substance d'une forme spéciale, etc. Sous une légère pression la membrane externe se déchire, et le contenu, entouré d'une pellicule incolore et extensible, apparaît au jour. „La membrane vide", dit M. de Bary „est formée des couches désignées sous les noms d'enveloppes externe et moyenne; cette dernière est tapissée d'une pellicule délicate bleuissant par l'iode et l'acide sulfurique, qui entourait précédemment la cellule interne expulsée, laquelle pos-

sède également une enveloppe de cellulose. *Au lieu de l'enveloppe interne unique, qu'on observait à l'époque de la maturité, il y en a donc maintenant deux.*" (*l. c.*, p. 29, Pl. IV, fig. 12—15). On ne saurait exprimer plus clairement les vues que j'ai exposées.

Dans le *Mesotaenium Chlamydosporium*, une Desmidiacée, M. de Bary mentionne (*l. c.*, p. 34) que les zygospores trahissent le début de la germination par la structure finement granuleuse et la coloration verdâtre, en apparence uniforme, que prend le contenu; bientôt après, celui-ci se divise manifestement en quatre parties, dont chacune, *entourée d'une membrane propre*, forme une cellule fille; nous avons donc ici quelque chose d'analogue à ce qui se passe dans les spores d'*Osmunda*, de *Ceratopteris* et de *Gleichenia*, à savoir, division du protoplasme et formation de nouvelles cellules avant la déhiscence de la spore.

Le cas est le même pour les spores de *Fegatella* (Leitgeb, *Unters. ü. d. Lebermoose*, III, p. 32) de *Frullania* et de *Radula* (Hofmeister, *Vergleich. Unters.*, p. 27 et 29). Nous trouvons cette partition également, et peut-être à un degré encore plus prononcé, dans la spore germante de l'*Andreaea* (Kühn dans Schenk u. Luerssen, *Mitth. a. d. Gesammtgeb. d. Bot.*, I, p. 6, Berggren dans *Bot. Zeit.*, 1872, p. 445), où la rupture de l'exospore livre déjà passage à un corps pluricellulaire. Cette formation de nouvelles parois cellulaires, je ne saurais toutefois la qualifier, avec M. Kühn (*l. c.*), de: „différenciation de l'endospore, avant qu'elle ne perce la membrane externe". Dans ces spores de Mousses il s'agit aussi, d'après ma conviction, de la formation d'une nouvelle paroi cellulaire aux dépens du protoplasme, la cellule ainsi renouvelée ou rajeunie se divisant itérativement avant de quitter la paroi de la spore. Les choses ne se passent pas autrement chez les *Sphagnum*. Bien que M. Schimper, dans sa description classique de ce genre (*Versuch einer Entw.-gesch. d. Torfmoose*, Stuttgart, 1858), ne fasse pas mention de changements subis par le contenu de la spore avant l'ouverture de l'exospore, ce qu'il dit de la structure et de la

formation des spores (p. 31 et 53), de même que sa courte description de la germination (p. 12) et ses figures (Pl. I, fig. 1—10), s'adapte parfaitement aux idées que j'ai développées plus haut.

M. H. Müller (Sachs, *Arbeiten d. bot. Instituts in Würzburg*, I, p. 478) a décrit en détail la germination des spores du *Funaria hygrometrica*, et, conformément à l'opinion reçue, lui aussi parle de l'endospore, qui est produite sous forme de tube à travers les fentes de l'exospore. Une cloison transversale sépare cette expansion de la capacité intérieure de la spore, et quelquefois cette première cloison peut se trouver à l'intérieur même de la spore. Chacune de ces expansions ou papilles devient la cellule mère de l'axe d'un proembryon etc....; lorsque cette expansion s'est développée en un filament bi- ou pluricellulaire, une expansion toute pareille à la première se montre de l'autre côté de la spore". Ici encore, je pense qu'il est beaucoup plus rationnel d'admettre, lors de la germination, un rajeunissement du contenu de la spore et la formation d'une nouvelle paroi, que de déduire la paroi de ces deux filaments multicellulaires de la paroi interne de la spore elle-même. Du reste, M. Müller dit lui-même que, dans les premiers jours qui suivent le semis des spores, une modification importante se produit dans le contenu de la spore, où la masse chlorophyllienne, jusque-là amorphe, se condense en grains distincts.

Enfin, dans les spores d'*Equisetum*, qu'on sait se développer rapidement et ne conserver que peu de jours leur faculté germinative, le développement paraît être continu, mais la marche en est la même que dans les cas dont il vient d'être parlé. Les belles recherches de Hofmeister (Pringsheim, *Jahrb. f. w. Bot.*, III, p. 287) montrent que la formation de la quatrième ou dernière enveloppe (c'est-à-dire, de la paroi de la cellule germinative) commence beaucoup plus tard que celle des autres, alors que les élatères sont déjà passablement développés, mais pourtant avant que la spore, entièrement mûre, se détache du sporange. Cette paroi de la cellule germinative, cellule contenant de la chlorophylle et ne tardant pas à se gonfler et à se dépouiller

des enveloppes extérieures et des élatères, doit donc être assimilée, sous le rapport morphologique, à la paroi formée immédiatement avant la germination dans la spore du *Spiropyra*, ainsi qu'à la paroi formée lors de la germination dans la spore des Fougères et d'autres Cryptogames.

En résumé, notre étude a donc conduit au résultat suivant:

L'opinion aujourd'hui généralement adoptée au sujet du rôle de l'endospore dans la germination est erronée.

Ce n'est pas l'endospore [1]) de la spore mûre qui forme la paroi de la première cellule du prothalle, ou du premier rhizoïde, ou de tous les deux; mais ces parois proviennent d'une nouvelle couche de cellulose, déposée par le protoplasme rajeuni du contenu de la spore, immédiatement avant la germination ou au début de cet acte.

L'opinion ordinaire doit son origine à l'analogie, indûment généralisée, des grains de pollen et des spores des Fougères.

L'analogie de ces organes est prouvée en ce qui concerne leur formation dans l'anthère et le sporange par quadripartition des cellules mères respectives, mais elle ne s'étend pas au développement de l'intine du grain de pollen en tube pollinique à la surface du stigmate, d'une part, et à la germination de la spore, de l'autre.

On a supposé cette dernière analogie, parce que l'opacité de la paroi des spores de la plupart des Fougères ne permettait pas d'observer les changements, qui se produisent dans le contenu de la spore avant l'ouverture de celle-ci.

Mais l'étude de l'acte germinatif dans les spores des Gleichéniacées, dont la paroi est transparente et incolore, montre la fausseté de cette supposition. Sur ces spores, d'importantes modificiations dans le contenu, ainsi que la production d'une nouvelle

---

[1]) Par endospore il faut entendre la membrane interne de la paroi de la spore mûre et non germée; non, comme on le fait quelquefois, la spore entière moins l'exospore.

paroi de cellulose, au début de la germination, se laissent clairement reconnaître. En outre, la germination d'autres spores de Fougères se rapproche beaucoup plus du développement des spores des Gleichéniacées que de la formation des tubes polliniques.

Contre l'opinion ordinaire, et en faveur de la mienne, plaident encore les circonstances suivantes:

1°. La seconde est mieux en harmonie avec les résultats des recherches récentes concernant les fonctions du protoplasme et la formation de la paroi de cellulose.

2°. Les valves ouvertes de la spore germante ont la même épaisseur et présentent les mêmes couches que la section de la paroi entière de la spore non germée.

3°. Dans beaucoup de cas, l'endospore de la spore mûre est cuticularisée et n'offre pas la réaction de la cellulose.

4°. Lors de la germination, il y a parfois division cellulaire dans la spore avant la déhiscence de celle-ci.

Enfin, ma manière de voir est applicable aussi à la germination des spores d'autres Cryptogames. Elle trouve un appui, entre autres, dans la description des phénomènes germinatifs des zygospores, donnée par M. Pringsheim pour *Spirogyra* et par M. de Bary pour *Genicularia* et *Mesotaenium*; elle n'est pas en opposition avec les phénomènes observés dans la germination des spores des Hépaticées, des Bryinées et des Equisétacées, phénomènes dont elle fournit, au contraire, une explication plus satisfaisante.

Utrecht, avril 1879.

EXPLICATION DES FIGURES.

(Pl. VIII).

Toutes les figures sont dessinées à un grossissement linéaire de 275 fois, sauf la fig. 9, qui représente un grossissement de 600 fois.

Fig. 1. Spore mûre et saine de *Gleichenia rupestris* R. Br., vue de côté. La paroi est incolore et transparente; en *a* se trouve le point de concours des trois côtes. La spore est colorée en jaune foncé; à travers la paroi se dessinent une multitude de globules de matière grasse, ainsi qu'un noyau cellulaire arrondi, situé au milieu, sous le point *a*.

Fig. 2. Spore semblable de *Gleichenia rupestris* R. Br., vue dans une direction perpendiculaire à celle de la fig. précédente. Le point *a*, où concourent les trois côtes *l*, forme ici le sommet; entre les extrémités de ces côtes se trouvent, dans le plan équatorial de la spore, les trois bourrelets *b*. Le grand noyau cellulaire est situé sous *a*.

Fig. 3. Spore de la même espèce, commençant à s'ouvrir. Deux des trois côtes se sont scindées en leurs deux moitiés, ce qui a rendu libre l'une des trois valves, laquelle s'est un peu écartée. La paroi montre les trois bourrelets *b*, comme dans la fig. précédente. Le grand noyau cellulaire occupe encore la même place. La spore est remplie, jusqu'à en éclater, d'une masse compacte de granulations et de grumeaux, de différentes grosseurs. La teinte n'est plus jaune pur, mais plus ou moins verdâtre.

Fig. 4. Spore semblable à celle de la fig. précédente, dans un stade un peu plus avancé de la germination. Les trois valves sont disjointes; entre elles se montre le contenu de la spore, sous forme de papille. Ce contenu est maintenant d'un vert vif et à granulations denses.

Fig. 5. Spore semblable à celle de la fig. précédente, vue perpendiculairement au plan équatorial. Les valves encore plus ouvertes et plus écartées.

Fig. 6. Spore germante de *Gleichenia rupestris* R. Br., sur le point de s'ouvrir (à peu près au même stade de développement que celle de la fig. 3), et traitée

par l'iode, pour rendre apparents les changements du contenu. Cette spore présentait un gros noyau cellulaire renfermant deux nucléoles, des globules de graisse relativement peu nombreux ou du moins peu distincts, et par contre une foule de granules d'amidon, excessivement petits et accumulés surtout vers le contour de la spore.

Fig. 7. Spore pareillement germante de *Gleichenia rupestris* R. Br., dans laquelle les globules de graisse ont beaucoup diminué, et où le noyau, devenu polyédrique, envoie des filaments plasmatiques vers la circonférence. Au voisinage du noyau se sont formés une multitude de grains amylacés très petits.

Fig. 8. Spore de *Gleichenia rupestris* R. Br., éclatée par une légère pression et traitée par le réactif de Millon. Pour rendre la figure plus claire, on y a omis les bourrelets de la paroi de la spore. Par la fente de la spore sortent des globules de graisse, tant gros que petits. Le réactif en question a coloré en rouge brique le noyau cellulaire *k* et différentes masses plus petites et irrégulières de protoplasme.

Fig. 9. Coupe transversale de la paroi de la spore de *Gleichenia rupestris* R. Br., faite au niveau de l'équateur; *ep* épispore; *ex* exospore, qui à l'endroit des bourrelets est formée de plusieurs couches différant par leur contenu en eau; *end* endospore, que le scalpel a détachée en *x* de l'exospore. Les trois bourrelets se reconnaissent immédiatement à l'épaisseur plus grande de l'exospore.

Fig. 10. Spore venant de germer, un peu plus avancée dans son développement que les spores représentées fig. 4 et 5, traitée par le chloro-iodure de zinc. Pour plus de netteté, la paroi de la spore n'a pas été coloriée et les bourrelets ont été omis. Le contenu de la spore s'est divisé en deux cellules, dont le plasma (pourvu d'un noyau dans chacune) s'est coloré en brun jaunâtre sous l'action du réactif. Celui-ci a rendu en outre apparentes, en les colorant en bleu, la nouvelle paroi de cellulose et la cloison de partage formée postérieurement.

Fig. 11, 12, et 13. Spores germées plus vieilles, traitées par le chloro-iodure de zinc. Pour ne pas charger le dessin, on a de nouveau négligé, dans les trois figures, les bourrelets et la coloration de la paroi cellulaire. Déjà dans la fig. 11, au côté inférieur, de même que dans la fig. 10, à gauche, mais plus distinctement dans les fig. 12 et 13, on voit la paroi de cellulose du jeune prothalle détachée et parfois très distante de la face interne de l'endospore, par suite de la contraction qu'elle a subie. Dans les cas représentés par les fig. 12 et 13, les cellules du prothalle renfermaient, outre la chlorophylle, qui ne manque jamais, une assez grande quantité d'amidon, en des points déterminés, indiqués sur la fig. 12, en *a* par une coloration plus foncée, et sur la fig. 13, en *a'*, par un pointillage noir. Le contenu protoplasmique des rhizoïdes était coloré en brun par le réactif.

Fig. 14. Spore bilatérale, mûre et saine, de *Gleichenia flabellata* R. Br., vue de côté. *k* noyau cellulaire, appliqué directement sur la côte qui se trouve en dessous.

Fig. 15. Spore germante de *Gleichenia flabellata* R. Br.. Les deux moitiés de la côte unique commencent à se disjoindre. La couleur jaune foncé du contenu, telle qu'elle se montre avant la germination, fig. 14, fait place à une teinte verdâtre, tout comme il arrivait pour les spores radiaires. Voir fig. 2, 3 et 4.

Fig. 16. Paroi de la spore ouverte de *Gleichenia flabellata* R. Br., d'où le contenu a été enlevé, de sorte qu'on voit maintenant distinctement les deux bourrelets *b* et *b* (un à chaque côté de la côte unique de ces spores bilatérales), bourrelets qui sont ordinairement plus difficiles à reconnaître sur la spore non germée, remplie de plasma.

Fig. 17. Spore germée de *Gleichenia flabellata* R. Br. Le jeune prothalle est composé de deux cellules, abondamment pourvues de globules gras et de chlorophylle, et dont la cloison de séparation a déjà été formée à l'intérieur de la spore.

NOTE

SUR LE

NOMBRE DE FOIS,

QU'AVEC UN NOMBRE DONNÉ DE DÉS, ON PEUT JETER UNE SOMME DONNÉE; ET SUR UNE APPLICATION DE CETTE RÈGLE,

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

---

1. Dans les jeux qui se jouent avec un ou plusieurs dés, le plus grand rôle appartiennent ordinairement au nombre des points jetés: c'est-à-dire, à la somme des chiffres (1 à 6) qui se trouvent être amenés dans les plans supérieurs de ces cubes. Or, cette somme peut quelquefois se composer d'éléments bien différents. La probabilité w_g d'avoir un nombre de points donné g est un problème de la théorie des chances à priori, puisqu'on peut déterminer par l'analyse tant le nombre N de tous les cas possibles, que le nombre n_g de cas favorables, où le nombre des points revient justement au nombre donné g. On voit qu'il s'agit ici d'un problème de la théorie des combinaisons de classe donnée, à somme donnée, avec exclusion de quelques éléments.

2. Commençons par les cas les plus simples, d'abord par celui d'un seul dé. Alors pour chaque nombre 1 à 6, on a $n_g = 1$; tandis que $N = \Sigma n_g = 6$. Par conséquent, pour g égal à 1 jusqu'à 6, on a toujours

$$w_g = 1 : 6.$$

Prenons deux dés, ce qui donne $N = 6^2 = 36$. On a les coups suivants, où le premier chiffre vaut pour l'un des dés, le deuxième pour l'autre.

1 + **1** = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7
1 + 2 = 3	**2** + **2** = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	**3** + **3** = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	**4** + **4** = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = 10
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	**5** + **5** = 10	6 + 5 = 11
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11	**6** + **6** = 12

On en conclut que le nombre de points

$g = 2$ peut être amené 1 fois,
3 peut être amené 2 fois,
4 peut être amené 3 fois,
5 peut être amené 4 fois,
6 peut être amené 5 fois,
7 peut être amené 6 fois,
8 peut être amené 5 fois,
9 peut être amené 4 fois,
10 peut être amené 3 fois,
11 peut être amené 2 fois,
12 peut être amené 1 fois,

dont la somme est 36 fois.

On voit en premier lieu que l'on ne saurait jeter moins de 2, ni plus de 12; ensuite qu'on a la relation

$$n_g = n_{12+2-g} = n_{14-g};$$

que les n_g croissent jusqu'au maximum n_7; et que les n_g sont la suite des nombres naturels. Au moyen de la division par $N = 36$, on peut aisement en déduire les probabilités

$$w_2 = w_{12} = \frac{1}{36} = 0.02777, \quad w_5 = w_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.11111,$$

$$w_3 = w_{11} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.05555, \quad w_6 = w_8 = \frac{5}{36} = 0.13889,$$

$$w_4 = w_{10} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.08333, \quad w_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16667.$$

3. Enfin, soit trois le nombre de dés. Alors on a $N = 6^3 = 216$, et le somme des points a pour limites $3 \times 1 = 3$ et $3 \times 6 = 18$. Or, on peut obtenir chaque somme de diverses manières, comme il ressort de la table suivante, où les trois colonnes valent pour les trois dés, et où l'on a mis ensemble les coups qui mènent au même nombre de points.

111	115	116	126	136	146	156	166	266	366
112	124	125	135	145	155	165	256	356	456
121	133	134	144	154	164	246	265	365	465
211	142	143	153	163	236	255	346	446	546
113	151	152	162	226	245	264	355	455	555
122	214	161	216	235	254	336	364	464	564
131	223	215	225	244	263	345	436	536	636
212	232	224	234	253	326	354	445	545	645
221	241	233	243	262	335	363	454	554	654
311	313	242	252	316	344	426	463	563	663
114	322	251	261	325	353	435	526	626	466
123	331	314	315	334	362	444	535	635	556
132	412	323	324	343	416	453	544	644	565
141	421	332	333	352	425	462	553	653	646
213	511	341	342	361	434	516	562	662	655
222		413	351	415	443	525	616		664
231		422	414	424	452	534	625		566
312		431	423	433	461	543	634		656
321		512	432	442	515	552	643		665
411		521	441	451	524	561	652		666
		611	513	514	533	615	661		
			522	523	542	624			
			531	532	551	633			
			612	541	614	642			
			621	613	623	651			
				622	632				
				631	641				

Dans cette table, tout comme dans celle du N°. 2, les rafles,

c'est-à-dire les coups où deux ou trois dés donnent le même nombre, sont imprimés en type plus fort.

Il s'ensuit que le nombre

$g =$	3	peut être amené	1	fois,
	4	peut être amené	3	fois,
	5	peut être amené	6	fois,
	6	peut être amené	10	fois,
	7	peut être amené	15	fois,
	8	peut être amené	21	fois,
	9	peut être amené	25	fois,
	10	peut être amené	27	fois,
	11	peut être amené	27	fois,
	12	peut être amené	25	fois,
	13	peut être amené	21	fois,
	14	peut être amené	15	fois,
	15	peut être amené	10	fois,
	16	peut être amené	6	fois,
	17	peut être amené	3	fois,
	18	peut être amené	1	fois,

dont la somme $= N = 216$ fois.

Ici encore on a relation manifeste

$$n_g = n_{18+3-g} = n_{21-g};$$

les n_g croissent jusqu'à $n_{10} = 27 = n_{11}$ pour décroître ensuite; mais la formation des nombres n_g n'est point évidente.

Pour en déduire les probabilités, il faut diviser par $N = 6^3 = 216 = \Sigma n_g$; et c'est ainsi que l'on obtient

$$w_3 = w_{18} = \frac{1}{216} = 0.0046296,$$

$$w_4 = w_{17} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72} = 0.0138888,$$

$$w_5 = w_{16} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0.0277777,$$

$$w_6 = w_{15} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} = 0.0462964,$$

$$w_7 = w_{14} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} = 0.0694444,$$

$$w_8 = w_{13} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72} = 0.0972222,$$

$$w_9 = w_{12} = \frac{25}{216} = 0.1157407,$$

$$w_{10} = w_{11} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

4. Nous venons de voir que, déjà pour trois dés, la loi que suivent les nombres n_g n'est point évidente; au lieu de la chercher, passons plutôt tout de suite au cas général, et posons-nous la question suivante. Soient k dés: quel est le nombre $n_{(g,k)}$ de cas où l'on obtient un nombre de points g? Puisque le nombre de tous les cas possibles est ici $N = 6^k$, on a pour la probabilité du nombre g

$$w_g = n_{(g,k)} : 6^k.$$

D'après le théorème de Bernoulli relatif au calcul des probabilités, si l'on prend le développement

$$Q = (w^1{}_a + w^2{}_b + w^3{}_c + w^4{}_d + w^5{}_e + w^6{}_z)^k,$$

on trouve tous les cas favorables pour le nombre g de points jetés, dans les termes $w_a{}^\alpha\, w_b{}^\beta\, w_c{}^\gamma\, w_d{}^\delta\, w_e{}^\varepsilon\, w_z{}^\zeta$ où l'on a $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = g$. Donc la somme des coefficients polynômaux respectifs donnera le nombre de fois que la combinaison voulue a lieu: mais ce nombre ne changera pas, lorsqu'on prendra tous les w_i égaux à un seul w. Dès lors on trouve

$$Q = w^k\,(1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5)^k = w^k \left(\frac{1-w^6}{1-w}\right)^k =$$

$$= w^k\,(1 - w^6)^k\,(1 - w)^{-k}.$$

Mais

$$(1 - w^6)^k = 1 - \frac{k}{1} w^6 + \frac{k}{1}\frac{k-1}{2} w^{12} - \frac{k}{1}\frac{k-1}{2}\frac{k-2}{3} w^{18} + \ldots,$$

$$(1 - w)^{-k} = 1 + \frac{k}{1} w + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2} w^2 + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2}\frac{k+2}{3} w^3 + \ldots$$

Afin de trouver dans le développement tous les termes à facteur $w^g = w^k w^{g-k}$, il faut chercher dans le produit de ces deux séries les termes à facteur w^{g-k}, à savoir

$$\begin{array}{ll}
1 & \times \dfrac{k^{g-k/1}}{1^{g-k/1}} w^{g-k}, \\[2ex]
-\dfrac{k}{1} w^6 & \times \dfrac{k^{g-k-6/1}}{1^{g-k-6/1}} w^{g-k-6}, \\[2ex]
+\dfrac{k}{1} \cdot \dfrac{k-1}{2} w^{12} & \times \dfrac{k^{g-k-12/1}}{1^{g-k-12/1}} w^{g-k-12}, \\[2ex]
-\dfrac{k}{1} \dfrac{k-1}{2} \dfrac{k-2}{3} w^{18} & \times \dfrac{k^{g-k-18/1}}{1^{g-k-18/1}} w^{g-k-18}.
\end{array}$$

Donc la somme cherchée donne ici

$$n_{(g \,.\, k)} = \frac{k^{g-k/1}}{1^{g-k/1}} - \frac{k}{1} \frac{k^{g-k-6/1}}{1^{g-k-6/1}} + \frac{k}{1} \frac{k-1}{2} \frac{k^{g-k-12/1}}{1^{g-k-12/1}} - \cdots$$

$$- \frac{k}{1} \frac{k-1}{2} \frac{k-2}{3} \frac{k^{g-k-18/1}}{1^{g-k-18/1}} + \cdots\cdots \quad (1)$$

Cette série s'arrêtera aussitôt qu'une des facultés numériques deviendra zéro ou négative.

On peut réduire encore, dans chaque terme, le quotient des facultés à un coefficient de binôme respectif, lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par $1^{k-1/1} : 1^{g-k-6a/1}$; car alors on trouve

$$\frac{k^{g-k-6a/1}}{1^{g-k-6a/1}} = \frac{1^{g-1-6a/1}}{1^{k-1/1}\, 1^{g-k-6a/1}} = \frac{(g-k-6a+1)^{k-1/1}}{1^{k-1/1}} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} = (-1)^{k-1} \binom{g-6a-1}{k-1}.$$

La formule (1) devient donc

$$n_{(g.k)} = \binom{g-1}{k-1} - \binom{k}{1}\binom{g-7}{k-1} + \binom{k}{2}\binom{g-13}{k-1} - \binom{k}{3}\binom{g-19}{k-1} + \cdots \quad (2)$$

Le dernier terme serait $(-1)^k \binom{k}{k} \binom{g-6k-1}{k-1}$; mais puisque toujours $g \leqq 6k$, on a $g - 6k - 1 < 0$; par suite ce terme

s'annule, et c'est le précédent, $(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\binom{g-6k+5}{k-1}$ qui termine la série. Elle devient donc

$$n_{(g.k)}=\binom{g-1}{k-1}-\binom{k}{1}\binom{g-7}{k-1}+\binom{k}{2}\binom{g-13}{k-1}\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}\binom{g-6k+5}{k-1};\quad(3)$$

où, dans l'application, il faut omettre tous les termes où les puissances $g-6k-1$ deviendraient négatives.

5. Maintenant, tâchons de démontrer la relation

$$n_{(g.k)}=n_{(6k+k-g.k)}=n_{(7k-g.k)}.$$

D'après la formule (1), le premier terme du développement de $n_{(7k-g.k)}$ est

$$\frac{k^{7k-g-k}/1}{1^{7k-g-k}/1}=\frac{k^{6k-g}/1}{1^{6k-g}/1}=\frac{1^{7k-g-1}/1}{1^{k-1}/1\;1^{6k-g}/1}=\frac{(6k-g+1)^{k-1}/1}{1^{k-1}/1}=$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{(g-6k-1)^{k-1}/-1}{1^{k-1}/1}=(-1)^{k-1}\binom{g-6k-1}{k-1};$$

et le terme $(k-a+1)$ième, sauf le facteur $\binom{k}{k-a}=\binom{k}{a}$,

$$(-1)^{k-a}\frac{k^{6k-g-6(k-a)}/1}{1^{6k-g-6(k-a)}/1}=(-1)^{k-a}\frac{k^{6a-g}/1}{1^{6a-g}/1}=(-1)^{k-a}\frac{1^{6a-g+k-1}/1}{1^{k-1}/1\;1^{6a-g}/1}=$$

$$=(-1)^{k-a}\frac{(6a-g+1)^{k-1}/1}{1^{k-1}/1}=(-1)^{k-a}(-1)^{k-1}\frac{(g-6a-1)^{k-1}/-1}{1^{k-1}/1}$$

$$=(-1)^{a-1}\binom{g-6a-1}{k-1}.$$

Donc on voit que les termes de la série (2) se reproduisent en ordre contraire, avec des signes opposés. Mais, comme on va le voir, cette série doit être égale à zéro, aussitôt que l'on ne rejette pas le dernier terme; par conséquent, ce dernier terme, avec le signe opposé, sera égal à la somme de tous les termes précédents. Or, cette somme dans la seconde série est $(-1)^a\binom{g-6a-1}{k-1}$ pour $a=0$, c'est-à-dire $+\binom{g-1}{k-1}$, ce qui en réalité est le premier terme de la série (2).

Pour les termes suivants, cette propriété est démontrée d'une

manière absolument analogue: de sorte qu'il en ressort la vérité de la relation $n_{(g,k)} = n_{(7k-g,k)}$, en supposant que la somme de la série (2) est bien zéro.

Pour $k=2$ on a $g \leqq 12$, par suite

$$n_{(g.2)} = \binom{g-1}{1} - \binom{2}{1}\binom{g-7}{1} + \binom{g-13}{1} = 0;$$

tandis que pour $2 \leqq g \leqq 7$ on trouve $= g-1$,

et pour $7 \leqq g \leqq 12$ de même $=(g-1)-2(g-7)=13-g$.

Pour $k=3$ on a $g \leqq 18$, donc

$$n_{(g.3)} = \binom{g-1}{2} - \binom{3}{1}\binom{g-7}{2} + \binom{3}{1}\binom{g-13}{2} - \binom{g-19}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[(g-1)(g-2)-3(g-7)(g-8+3(g-13)(g-14)-(g-19g-20)] = 0;$$

mais pour $3 \leqq g \leqq 8$ on la trouve $= \frac{1}{2}(g-1)(g-2)$,

$8 \leqq g \leqq 13$ $\quad = \frac{1}{2}.2\,[-g^2+21\,g-83]$,

$13 \leqq g \leqq 18$ $\quad = \frac{1}{2}\,[g^2-39g+380] = \frac{1}{2}(g-19)(g-20)$.

La série totale pour $n_{(g.k)}$ s'annule donc réellement pour les valeurs spéciales 2 et 3 de k. Dans le cas général, il est clair que cette série ne peut s'annuler que lorsque s'annulent tous les coefficients de chaque puissance de $g-1=q$. Afin de faire voir que cela arrive en effet, prenons a au lieu de 6, puisque cette généralisation aidera plutôt à rendre la démonstration plus évidente; et multiplions par $1^{k-1/1}$, alors nous aurons

$$q^{k-1/-1} - \binom{k}{1}(q-a)^{k-1/-1} + \binom{k}{2}(q-2a)^{k-1/-1} - \ldots$$

$$+ (-1)^k \binom{k}{k}(q-ka)^{k-1/-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Mais, comme on le sait,

$q^{2/-1} = q^2 - q$, $q^{4/-1} = q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q$,

$q^{3/-1} = q^3 - 3q^2 + 2q$, $q^{5/-1} = q^5 - 10q^5 + 35q^3 - 50q^2 + 24q$,

par conséquent, on doit avoir en général

$$q^{k-1/-1} = q^{k-1} - A_{k-2}q^{k-2} + A_{k-3}q^{k-3} + \ldots (-1)^{k-l-1} A_l q^l + \ldots + A_1 q,$$

où les A_m sont les coefficients de faculté pour le $(k-1)^{\text{ième}}$ ordre.

Dès lors on trouve les termes de puissance l, qui résultent du développement des facultés dans la série (4), suivant cette dernière formule, successivement comme suit:

$q^{k-1/-1}$ y contribue $+(-1)^{k-l-1}A_l q^l$;

$-\binom{k}{1}(q-a)^{k-1/-1}$ y contribue

$$-\binom{k}{1}\left[\binom{k-1}{k-l-1}a^{k-l-1}-A_{k-2}\binom{k-2}{k-l-2}a^{k-l-2}+\right.$$
$$\left.+A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}a^{k-l-3}+\ldots\ldots+(-1)^{k-l-1}A_l\right]q^l;$$

$+\binom{k}{2}(q-2a)^{k-1/-1}$ y contribue

$$+\binom{k}{2}\left[\binom{k-1}{k-l-1}(2a)^{k-l-1}-A_{k-2}\binom{k-2}{k-l-2}(2a)^{k-l-2}+\right.$$
$$\left.+A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}(2a)^{k-l-3}+\ldots+(-1)^{k-l-1}A_l\right]q^l;$$

$(-1)^k\binom{k}{k}(q-ka)^{k-1/-1}$ y contribue

$$(-1)^k\binom{k}{k}\left[\binom{k-1}{k-l-1}(ka)^{k-l-1}-A_{k-2}\binom{k-2}{k-l-2}(ka)^{k-l-2}+\right.$$
$$\left.+A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}(ka)^{k-l-3}+\ldots.+(-1)^{k-l-1}A_l\right]q^l.$$

Prenons-en la somme par colonnes, et nous trouverons pour le coefficient de quelque A_{k-s}

$$(-1)^{s-1}A_{k-s}\binom{k-s}{k-l-s}a^{k-l-s}$$
$$\left[-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}2^{k-l-s}-\binom{k}{3}3^{k-l-s}+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}k^{k-l-s}\right].$$

Maintenant posons le développement connu

$$1^p+2^p x+3^p x^2\ldots+k^p x^{k-1}+\ldots=\frac{[x^{p-1}]}{(1-x)^{p+1}},$$

où $[x^{p-1}]$ est une fonction connue de degré $p-1$. Multiplions-le par l'autre développement connu du binôme

$$1-\binom{k}{1}x+\binom{k}{2}x^2-\binom{k}{3}x^3+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}x^{k-1}+(-1)^k x^k=(1-x)^k,$$

alors le coefficient du terme x^{k-1} dans le produit sera

$$k^p-\binom{k}{1}(k-1)^p+\binom{k}{2}(k-2)^p-\binom{k}{3}(k-3)^p\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}1^k.$$

Multiplions de part et d'autre par $(1-x)^{p+1}$: alors au premier membre ce coefficient deviendra celui de x^{p+1} : mais au second membre la plus grande puissance est la $p-1^{\text{ième}}$; par conséquent ce coefficient devra être zéro pour toute valeur de k depuis zéro.

Or, prenons $p=k-l-s$ et multiplions par $(-1)^k$: le résultat coïncidera pour le coefficient réduit de quelque A_{k-s}. Par suite, la série totale pour $n_{(g.k)}$ s'annule en effet, comme nous venions de le supposer.

6. Mais, pour le calcul des nombres $n_{(g\,k)}$ dans une table, on peut trouver des voies plus faciles.

En premier lieu, la série (2) devient pour $g+1$, au lieu de g,

$$n_{(g+1.k)}=\frac{g^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}-\binom{k}{1}\frac{(g-6)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}+\binom{k}{2}\frac{(g-12)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}-\ldots \quad (5)$$

Pour prendre la différence des deux séries (2) et (5), observons qu'on a

$$\frac{(g-6a)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=\frac{(g-6a)\,(g-6a-1)^{k-2/-1}}{1^{k-1/1}}$$

et

$$\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=\frac{(g-6a-1)^{k-2/-1}\,(g-6a-k+1)}{1^{k-1/1}};$$

de sorte que la différence des deux fractions correspondantes devient, après réduction,

$$\frac{(g-6a-1)^{k-2/-1}}{1^{k-1/1}}(k-1)=\frac{(g-6a-1)^{k-2/-1}}{1^{k-2/1}}=\binom{g-6a-1}{k-2}.$$

Par conséquent on trouve

$$n_{(g+1.k)} - n_{(g.k)} = \binom{g-1}{k-2} - \binom{k}{1}\binom{q-7}{k-2} + \binom{k}{2}\binom{g-13}{k-2} - \ldots \quad (6)$$

Ensuite, si dans la série (2) on change k en $k+1$, il viendra

$$n_{(g.k+1)} = \frac{(g-1)^{k/-1}}{1^{k/1}} - \binom{k+1}{1}\frac{(g-7)^{k/-1}}{1^{k/1}} + \binom{k+1}{2}\frac{(g-13)^{k/-1}}{1^{k/1}} - \ldots \quad (7)$$

Afin d'effectuer ici la soustraction des deux séries (2) et (7), observons d'abord que

$$\binom{k+1}{a}\frac{(g-6a-1)^{k/-1}}{1^{k/1}} = \frac{(k+1)k^{a-1/-1}}{1^{a/1}}\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}(g-6a-k)}{1^{k/1}},$$

$$\binom{k}{a}\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} = \frac{(k-a+1)k^{a-1/-1}}{1^{a/1}}\frac{k.(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}};$$

et que par suite la différence des termes correspondants donnera

$$\frac{k^{a-1/-1}(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k/1}}\left[(k+1)(g-6a-k)-(k-a+1)k\right] =$$

$$= \frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k-a+1/1}}\left[(k+1)(g-2k)-(5k+6)a\right];$$

or, ceci n'a pas lieu auprès du premier terme, où au contraire cette différence devient

$$\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}\left[(g-k)-k\right].$$

Finalement, on trouve donc

$$n_{(g.k+1)} - n_{(g.k)} = \frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}(g-2k) - \frac{(g-7)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}\left[(k+1)(g-2k)-(5k+6)\right] +$$

$$+ \frac{(g-13)^{k-1/-1}}{2\,.\,1^{k-1/1}}\left[(k+1)(g-2k)-2(5k+6)\right] - \ldots \quad (8)$$

Les deux formules (6) et (8), mais surtout la première, sont très propres à déduire les nombres $n_{(g.k)}$ successivement des valeurs déjà connues. De cette manière, on a calculé la table suivante.

TABLE POUR $n_{(g.k)}$.

g.	$k=1$.	$=2$.	$=3$.	$=4$.	$=5$.	$=6$.	$=7$.	$=8$.
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7		6	15	20	15	6	1	
8		5	21	35	35	21	7	1
9		4	25	56	70	56	28	8
10		3	27	80	126	126	84	36
11		2	27	104	205	252	210	120
12		1	25	125	305	456	462	330
13			21	140	420	756	917	792
14			15	146	540	1161	1667	1708
15			10	140	651	1666	2807	3368
16			6	125	735	2247	4417	6147
17			3	104	780	2856	6538	10480
18			1	80	780	3431	9142	16808
19				56	735	3906	12117	25488
20				35	651	4221	15267	36688
21				20	540	4332	18327	50288
22				10	420	4221	20993	65808
23				4	305	3906	22967	82384
24				1	205	3431	24017	98813
25					126	2856	24017	113688
26					70	2247	22967	125588
27					35	1666	20993	133288
28					15	1161	18327	135954
29					5	756	15267	133288
30					1	456	12117	125588
31						252	9142	113688
32						126	6538	98813
33						56	4417	82384
34						21	2807	65808
35						6	1667	50288
36						1	917	36688
37							462	25488
38							210	16808
39							84	10480
40							28	6147
41							7	3368
42							1	1708
43								792
44								330
45								120
46								36
47								8
48								1
$6^k=$	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616

7. Dans l'emploi de cette table, il ne faut pas oublier que $n_{(g.k)}$ désigne le nombre des cas favorables parmi 6^k cas possibles. Lorsqu'on trouve, par exemple,

$$\begin{array}{lll}
n_{(2.1)} = n_{(2.2)} = 1, & n_{(3.1)} = n_{(3.3)} = 1, & n_{(4.1)} = n_{(4.4)} = 1, \\
n_{(4.2)} = n_{(4.3)} = 3, & n_{(5.1)} = n_{(5.5)} = 1, & n_{(5.2)} = n_{(5.4)} = 4, \\
n_{(6.1)} = n_{(6.6)} = 1, & n_{(6.2)} = n_{(6.5)} = 5, & n_{(6.3)} = n_{(6.4)} = 10, \\
n_{(7.2)} = n_{(7.6)} = 6, & n_{(7.3)} = n_{(7.5)} = 15, & n_{(8.3)} = n_{(8.6)} = 21, \\
n_{(8.4)} = n_{(8.5)} = 35, & n_{(9.4)} = n_{(9.6)} = 56, & n_{(10.5)} = n_{(10.6)} = 126,
\end{array}$$

les probabilités correspondantes, où il faut diviser ces nombres respectivement par 6^k, donneront des résultats tout différents.

Au contraire, on trouve une probabilité égale dans le cas suivant,

$$w_{(14.3)} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72} \text{ et } w_{(14.5)} = \frac{540}{6^5} = \frac{5}{72};$$

de sorte qu'il est tout aussi probable de jeter 14 avec 3 dés qu'avec 5 dés.

L'observation que l'on vient de faire à l'égard de l'égalité de quelques $n_{(g.k)}$, on la trouve confirmée par la formule (8), dans le cas de g pair; puisque alors, au premier terme, le facteur $(g - 2k)$ s'annule pour $g = 2k$. Dans le second terme, au contraire, le facteur $(k+1)(g-2k)-(5k+6)$ devient $= -(5k+6)$; mais la faculté $(2k-7)^{k-1/-1}$ a pour dernier facteur $(k-5)$, de sorte que cette faculté s'évanouit pour toutes les valeurs $k \leqq 5$. Lorsque ensuite il vient $g > 2k > 10$, ce second terme y reste, et plus tard encore les termes suivants. Par conséquent, on ne saurait avoir $n_{(2g.k)} = n_{(2g.k+1)}$ pour une valeur $k > 5$; les cas mentionnés sont donc les seuls.

Maintenant passons à une valeur g impaire: et à cet effet cherchons la différence de $n_{(g.k+2)}$ et $n_{(g.k)}$. On a d'abord

$$n_{(g.k+2)} = \frac{(g-1)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} - \binom{k+2}{1} \frac{(g-7)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} +$$

$$+ \binom{k+2}{2} \frac{(g-13)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} - \ldots$$

Par suite, on a généralement

$$\binom{k+2}{a}\frac{(g-6a-1)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}}=$$

$$=(k+2)(k+1).k^{a-2/-1}(g-6a-k-1)(g-6a-k)(g-6a-1)^{k-1/-1}\frac{1}{1^{a/1}1^{k+1/1}},$$

$$\binom{k}{a}\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=$$

$$=(k-a+1)(k-a+2).k^{a-2/-1}k(k+1)(g-6a-1)^{k-1/-1}\frac{1}{1^{a/1}1^{k+1/1}}.$$

Or, puisque ces deux résultats contiennent le facteur $k+1$, leur différence donne

$$\frac{k^{a-2/-1}(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k/1}}[(k+2)(g-6a-k-1)(g-6a-k)-$$

$$-(k-a+1)(k-a+2)k]=$$

$$=\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k-a+2/1}}[(k+2)g(g-12a-2k-1)+$$

$$+(35k+72)a^2+(14k^2+33k+12)a];$$

tandis que cette même différence devient pour le premier terme

$$\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}[(g-k-1)(g-k)-k(k+1)]=$$

$$=\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}g(g-2k-1)=\frac{g^{k/-1}}{1^{k+1/1}}(g-2k-1).$$

Par, conséquent on trouve la formule générale

$$n_{(g.k+2)}-n_{(g.k)}=$$

$$=\frac{g^{k/-1}}{1^{k+1/1}}(g-2k-1)-\frac{(g-7)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}[(k+2)g(g-2k-13)+(14k^2+68k+84)]+$$

$$+\frac{(g-13)^{k-1/-1}}{2.1^{k/1}}[(k+2)g(g-2k-25)+(28k^2+206k+312)]-\ldots \quad (9)$$

Cette formule nous fait voir que, pour $g = 2k + 1$, le premier terme s'annule; dans le second terme on a

$$-12(k+2)g + (14k^2 + 68k + 84) = -10k^2 + 8k + 60;$$

mais la faculté $(2k-6)^{k-1/-1}$ a pour dernier terme $k-4$; donc cette faculté s'annule pour $k < 4$.

Mais lorsqu'on a $g = 2k + 1 > 9$, ce second terme ne s'évanouit plus, et plus tard il en est de même pour les autres termes. Par conséquent on n'a jamais $n_{(2g+1.k)} = n_{(2g+1.k+2)}$, depuis le moment où k devient plus grand que 4; et ainsi les cas cités plus haut sont les seuls possibles.

Si l'on rapproche les deux discussions précédentes, on en déduit la conséquence que la relation $n_{(g.k)} = n_{(g.k+l)}$ ne pourra se réaliser en général, sauf dans les cas où, bien fortuitement, les termes des deux séries respectives se détruisent arithmétiquement.

8. Appliquons la théorie précédente à un jeu de hasard anglais, nommé *krabs*, que l'on joue avec trois dés.

Appelons A le joueur ou banquier, ici le *tenant*, qui tient le cornet aux dés, et B son antagoniste, le *servant*, qui après chaque coup remet les dés dans le cornet. On a ici les règles suivantes.

a. En premier lieu A jette les dés, pour *livrer la chance de* B: ce sont seulement les nombres 8, 9, 10, 11, 12 ou 13 qui peuvent y servir; les autres coups ne comptent pas.

b. La chance de B étant livrée, le tenant doit *se couvrir*, en jetant pour lui-même.

Lorsque le nombre amené est le même que la chance du servant B, déterminée suivant la règle a, le tenant A fait une répétition, et il gagne.

Vis-à-vis de cette chance de gagner, il doit se trouver des chances de perte. C'est à quoi servent les *krabs*, c'est-à-dire les coups 3, 4, 5, 6 et 15, 16, 17, 18. Mais ces krabs valent d'une manière différente, suivant les divers cas de la chance du servant B.

c. La chance de B étant 10 ou 11, par la règle a: alors le tenant A gagne lorsqu'il jette respectivement 10 ou 11 (comme

répétition), ou lorsqu'il jette le krabs 15; il perd, au contraire, lorsqu'il jette les autres krabs, 3, 4, 5, 6, 16, 17, 18.

d. La chance de B étant 9 ou 12: alors le joueur A gagne lorsqu'il se couvre par une répétition 9 ou 12, ou bien par le krabs 15: mais il perd par les autres krabs 3, 4, 5, 6, 16, 17, 18.

e. La chance de B étant 8 ou 13: alors le tenant gagne en jetant 8 ou 13, une répétition, ou bien le krabs 16; mais pour les autres krabs 3, 4, 5, 6, 15, 17, 18, il perd.

f. Mais lorsque le nombre jeté est autre que les nombres cités, il devient la chance du tenant A; et comme, après la soustraction des krabs, qui toujours finissent le jeu dans l'un ou l'autre sens, il reste encore les nombres 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14, le tenant A a deux chances de plus que le servant B pour se couvrir.

A partir de ce moment, on ne tient plus compte des krabs ou des répétitions.

g. Le tenant A gagne ou perd, selon qu'il jette d'abord sa chance, ou la chance du servant B.

h. Seulement dans le cas où A perd, il passe les dés à B, qui est obligé d'accepter la partie.

Il nous faut chercher maintenant la probabilité de gain pour le tenant A, quand il jette un des nombres suivants 8, 9, 10, 11, 12 ou 13.

9. Commençons par 10, comme chance livrée à B.

La règle **c** nous montre dans quels cas A gagne ou perd d'emblée.

Lorsque, au second coup **b**, il jette

3, dans 1 cas il y a perte;
4, dans 3 cas il y a perte;
5, dans 6 cas il y a perte;
6, dans 10 cas il y a perte;
10, dans 27 cas il y a gain;
15, dans 10 cas il y a gain;
16, dans 6 cas il y a perte;

17, dans 3 cas il y a perte;
18, dans 1 cas il y a perte.

Il peut encore se couvrir par les nombres

$$x = 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13 \text{ ou } 14,$$
$$\text{en } a = 15,\ 21,\ 25,\ 27,\ 25,\ 21 \text{ ou } 15 \text{ cas possibles.}$$

Au second coup, il y a donc respectivement a cas de gain, en face des 27 cas de perte pour le nombre 10: donc il y a $216 - (a + 27) = 189 - a$ cas où il faut passer à un troisième coup, dont la probabilité sera par conséquent

$$\frac{189 - a}{216}.$$

Pour ce troisième coup et pour tous les coups suivants la règle **a** n'est plus applicable, mais est remplacée par la règle **g**: donc le nombre des coups est indéterminé. Seulement, pour chacun d'eux, il y a toujours $a - 27$ cas de gain et $189 - a$ cas d'un coup ultérieur.

Donc, pour calculer l'espérance mathématique de gain, après le deuxième coup, on trouve

$$(a-27)\left\{1 + \frac{189-a}{216} + \left(\frac{189-a}{216}\right)^2 + \left(\frac{189-a}{216}\right)^3 + \ldots\right\} =$$
$$= (a-27)\frac{1}{1 - \frac{189-a}{216}} = (a-27)\frac{216}{216-(189-a)} =$$
$$= (a-27)\frac{216}{27+a} = 216\,\frac{a-27}{a+27}.$$

Or, on trouve l'espérance mathématique de gain avant le second coup en multipliant l'espérance trouvée par la probabilité de jeter le nombre x à ce deuxième coup, c'est-à-dire par $\frac{a}{216}$; par conséquent elle devient

$$216\,\frac{a-27}{a+27}\,\frac{a}{216} = a\,\frac{a-27}{a+27}.$$

En suite du raisonnement qui précède, on se trouve conduit aux calculs consécutifs exposés dans le tableau suivante.

Jets. Cas.	2e coup. Gain.	Cas d'un 3ième coup.	Espérance totale de gain après le 2ième coup.	Probabilité au 1er coup.	Espérance totale de gain avant le 2e coup.
7 avec 15	$15-27=-12$	$216-(15+27)=174$	$-12.\frac{216}{216-174}=-12.\frac{216}{42}=-61\frac{5}{7}$	$\times\ 15$	$=-925\frac{5}{7}$
8 avec 21	$21-27=-6$	$216-(21+27)=168$	$-6.\frac{216}{216-168}=-6.\frac{216}{48}=-27$	$\times\ 21$	$=-567$
9 avec 25	$25-27=-2$	$216-(25+27)=164$	$-2.\frac{216}{216-164}=-2.\frac{216}{52}=-8\frac{4}{13}$	$\times\ 25$	$=-207\frac{9}{13}$
11 avec 27	$27-27=0$	$216-(27+27)=162$	$0.\frac{216}{216-162}=0$	$\times\ 27$	$=0$
12 avec 25	$25-27=-2$	$216-(25+27)=164$	$-2.\frac{216}{216-164}=-2.\frac{216}{52}=-8\frac{4}{13}$	$\times\ 25$	$=-207\frac{9}{13}$
13 avec 21	$21-27=-6$	$216-(21+27)=168$	$-6.\frac{216}{216-168}=-6.\frac{216}{48}=-27$	$\times\ 21$	$=-567$
14 avec 15	$15-27=-12$	$216-(15+27)=174$	$-12.\frac{216}{216-174}=-12.\frac{216}{42}=-61\frac{5}{7}$	$\times\ 15$	$=-925\frac{5}{7}$
149				dont la somme est	$-3400\frac{74}{91}$.

En y ajoutant le gain suivant la règle c, tel que nous l'avions trouvé ci-dessus, on a pour gain total

$$(27+10)-(1+3+6+10+6+3+1)-3400\frac{74}{91}:216=-8\frac{271}{364};$$

et par conséquent pour l'espérance de gain au premier coup

$$w_{10}=-8\frac{271}{364}:216=-\frac{1061}{26208}=w_{11}.$$

Car, si la chance livrée pour le servant B était 11 au lieu de 10, on n'aurait qu'à permuter partout les nombres 10 et 11: mais cela n'entraînerait aucun changement dans le nombre divers des cas; d'où l'on conclut aisément que le résultat final ne changerait pas non plus: c'est-à-dire, qu'on aurait $w_{11}=w_{10}$.

9. Vient ensuite le cas où la chance livrée pour le servant B est 9. Les raisonnements précédents restent alors les mêmes, il est vrai, mais les nombres varient, vu qu'il faut dans ce cas nous tenir à la règle d, qui mène aux résultats suivants.

Lorsque A se couvre par

3, dans		1 cas il y a perte;
4, dans		3 cas il y a perte;
5, dans		6 cas il y a perte;
6, dans		10 cas il y a perte;
9, dans	25 cas il y a gain;	
15, dans	10 cas il y a gain;	
16, dans		6 cas il y a perte;
17, dans		3 cas il y a perte;
18, dans		1 cas il y a perte.

Puis, il lui reste

Jets. Cas.	2e coup. Gain.	Cas d'un 3ième coup.	Espérance totale de gain après le 2ième coup.	Probabilité au 1er coup.	Espérance totale de gain avant le 2e coup.
7 avec 15	$15-25=-10$	$216-(15+25)=176$	$-10.\frac{216}{216-176}=-10.\frac{216}{40}=-54$	$\times\ 15$	$=-810$
8 avec 21	$21-25=-4$	$216-(21+25)=170$	$-4.\frac{216}{216-170}=-4.\frac{216}{46}=-18\frac{18}{23}$	$\times\ 21$	$=-394\frac{10}{23}$
10 avec 27	$27-25=+2$	$216-(27+25)=164$	$+2.\frac{216}{216-164}=+2.\frac{216}{52}=+8\frac{4}{13}$	$\times\ 27$	$=+224\frac{4}{13}$
11 avec 27	$27-25=+2$	$216-(27+25)=164$	$+2.\frac{216}{216-164}=+2.\frac{216}{52}=+8\frac{4}{13}$	$\times\ 27$	$=+224\frac{4}{13}$
12 avec 25	$25-25=0$	$216-(25+25)=166$	$0.\frac{216}{216-166}=0$	$\times\ 25$	$=0$
13 avec 21	$21-25=-4$	$216-(21+25)=170$	$-4.\frac{216}{216-170}=-4.\frac{216}{46}=-18\frac{18}{13}$	$\times\ 21$	$=-394\frac{10}{23}$
14 avec 15	$15-25=-10$	$216-(15+25)=176$	$-10.\frac{216}{216-176}=-10.\frac{216}{40}=-54$	$\times\ 15$	$=-810$
151				dont la somme est	$-1960\frac{76}{299}$,

de sorte que le gain entier sera

$$(25+10)-(1+3+6+10+6+3+1)-1960.\frac{76}{299}:216=-4\frac{45}{598}.$$

Par conséquent, l'espérance mathématique de gain au premier coup sera

$$w_9=-4\frac{45}{598}:216=-\frac{2437}{129168}=w_{12}.$$

Car lorsque 12 serait la chance livrée pour B, au lieu de 9, rien ne se trouverait changé dans les nombres auprès du raisonnement précédent, et le résultat pour w_{12} serait le même que pour w_9.

10. Enfin, il nous reste encore à discuter le cas où 8 est la chance livrée pour le servant B. Cela n'aura encore aucune influence sur la manière de raisonner, mais seulement sur les nombres de cas possibles.

En premier lieu, lorsque le tenant A peut se couvrir par

3, dans		1 cas il y a perte;
4, dans		3 cas il y a perte;
5, dans		6 cas il y a perte;
6, dans		10 cas il y a perte;
8, dans	21 cas il y a gain;	
15, dans		10 cas il y a perte;
16, dans	6 cas il y a gain;	
17, dans		3 cas il y a perte;
18, dans		1 cas il y a perte.

Ensuite, on a encore les cas suivants.

Jets. Cas.	2e coup. Gain.	Cas d'un 3ième coup.	Espérance totale de gain après le 2ième coup.	Probabilité au 1er coup.	Espérance totale de gain avant le 2e coup.
7 avec 15	$15-21=-6$	$216-(15+21)=180$	$-6.\frac{216}{216-180}=-6.\frac{216}{36}=-36$	$\times 15$	$=-540$
9 avec 25	$25-21=+4$	$216-(25+21)=170$	$+4.\frac{216}{216-170}=+4.\frac{216}{46}=+18\frac{18}{23}$	$\times 25$	$=+469\frac{13}{23}$
10 avec 27	$27-21=+6$	$216-(27+21)=168$	$+6.\frac{216}{216-168}=+6.\frac{216}{48}=+27$	$\times 27$	$=+729$
11 avec 27	$27-21=+6$	$216-(27+21)=168$	$+6.\frac{216}{216-168}=+6.\frac{216}{48}=+27$	$\times 27$	$=+729$
12 avec 25	$25-21=+4$	$216-(25+21)=170$	$+4.\frac{216}{216-170}=+4.\frac{216}{46}=+18\frac{18}{23}$	$\times 25$	$=+469\frac{13}{23}$
13 avec 21	$21-21=0$	$216-(21+21)=174$	$0.\frac{216}{216-174}=\quad=9$	$\times 21$	$=0$
14 avec 15	$15-21=-6$	$216-(15+21)=180$	$-6.\frac{216}{216-180}=-6.\frac{216}{36}=-36$	$\times 15$	$=-540$
155				dont la somme est	$+1317\frac{3}{23}$.

Ainsi le gain total devient ici

$$(21+6)-(1+3+6+10+10+3+1)+1317\frac{3}{23}:216=-\frac{83}{92};$$

et par conséquent l'espérance mathématique de gain au premier coup — attendu que pour la chance 13 on revient au même nombre de cas, et par suite au même résultat — est exprimée par

$$w_8=w_{13}=-\frac{83}{92}:216=-\frac{83}{19872}.$$

11. On a vu que partout ici l'espérance mathématique de gain pour le tenant A est négative, c'est-à-dire, que le tenant aura toujours la probabilité de perdre; mais que, dans aucun des cas discutés la probabilité de cette perte, ne s'élèvera à $4\frac{1}{4}$ pour cent. Lorsqu'on veut calculer cette probabilité, avant que la chance du servant B ne soit livrée, il faut observer que le nombre de cas favorables pour les $w_{10}=w_{11}$, $w_9=w_{12}$, $w_8=w_{13}$ sera respectivement 27, 25 et 21, dont la somme est 146 cas.

Tous les autres 70 cas, c'est-à-dire ceux où l'on jette 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16, 17, 18, ne comptent pas suivant la règle a.

Ainsi l'on trouve pour l'espérance mathématique cherchée, qui aura lieu avant le commencement du jeu

$$W=[27(w_{10}+w_{11})+25(w_9+w_{12})+21(w_8+w_{13})]:146=$$

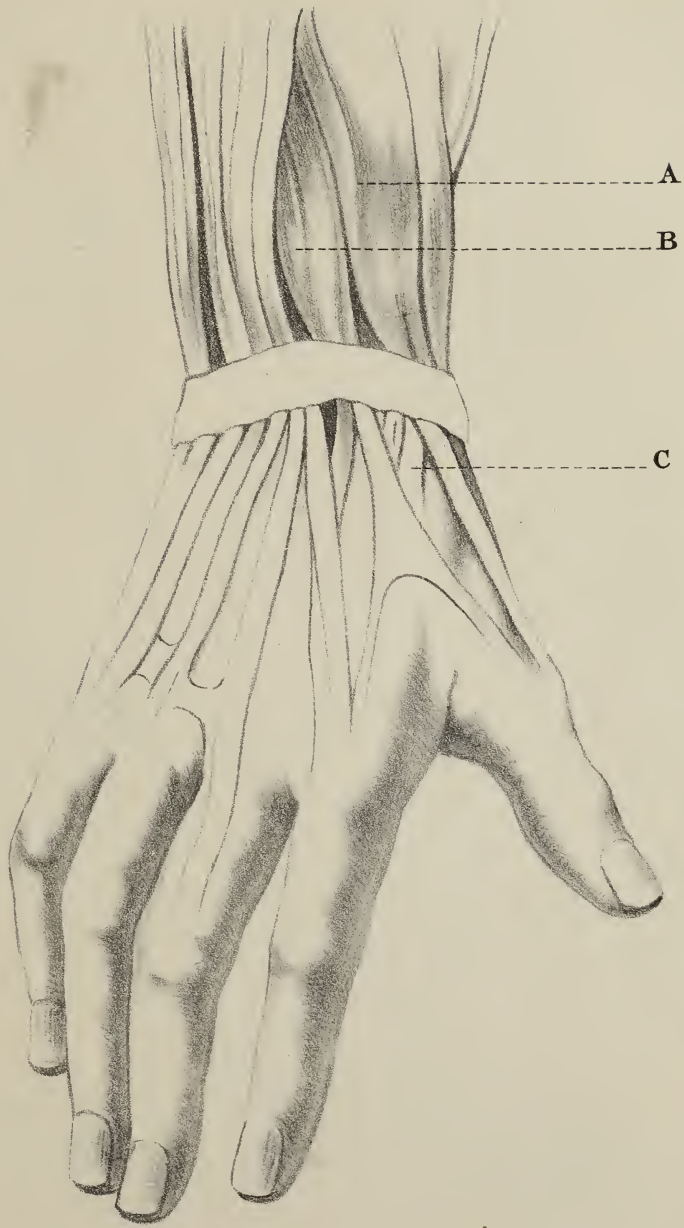
$$=\left[-54\frac{1061}{7.13.4.72}-50\frac{2437}{13.23.2.216}-42\frac{83}{23.4.216}\right]:146=$$

$$=-\frac{[54.1061.23.3-50.2437.7.2-42.83.7.13]}{[146.7.13.23.4.216]}=$$

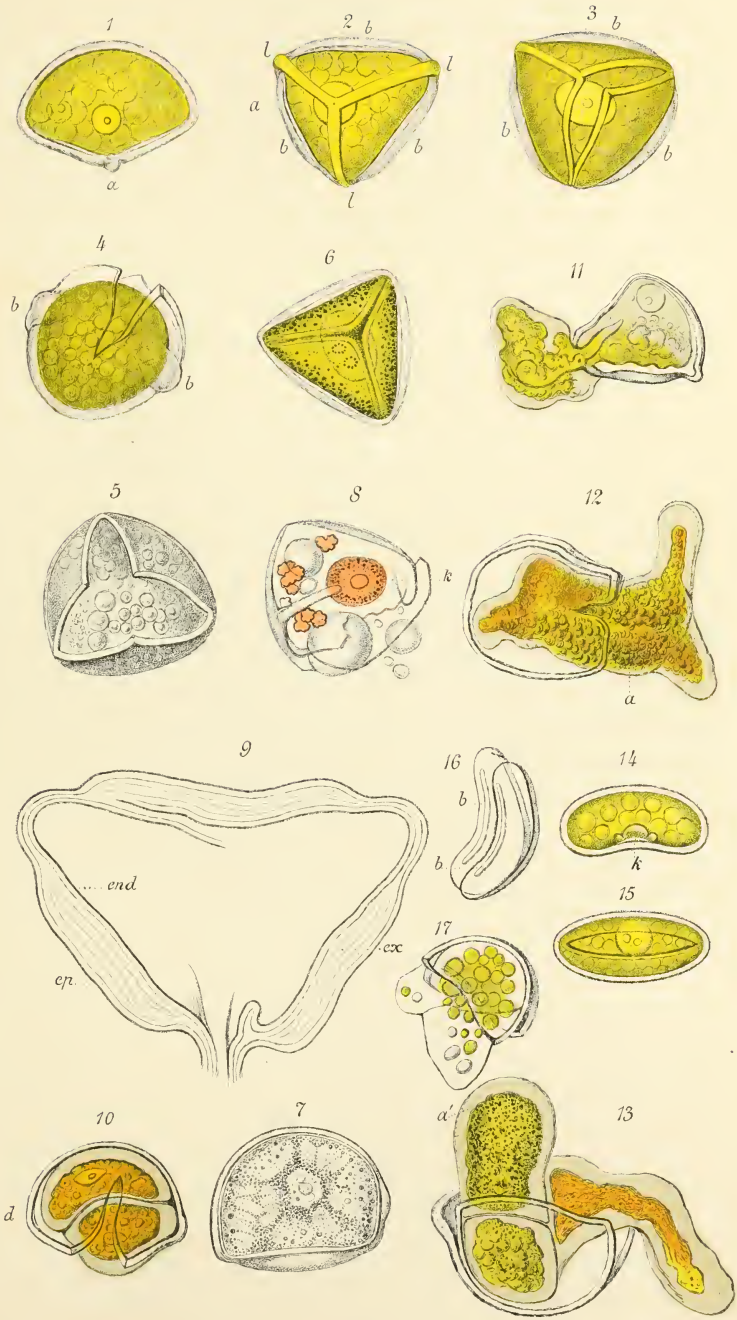
$$=-5976412:[146.7.13.23.4.216]=-\frac{4997}{146.7.216}=$$

$$=-\frac{4997}{220752}.$$

C'est-à-dire une probabilité de perte d'environ $\frac{1}{44}$, soit un peu plus de $2\frac{1}{4}$ pour cent.



Lith. Ecrire & Binger



Rauwenhoff, ad. nat. del. Steend J Bos Wz Utrecht.

TOME XIV. 5me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et S. C. Snellen van Vollenhoven.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1879.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC
G. E. SCHULZE.

LES LOIS

DE LA PERMÉABILITÉ DU SOL,

PAR

F. SEELHEIM.

Les dépôts meubles marins et fluviatiles, qui doivent leur origine aux roches cohérentes désagrégées par des actions mécaniques et chimiques sous l'influence de l'eau, forment une grande partie de nos côtes, entourent comme d'une large ceinture les bords de nos fleuves, et recouvrent même, sur une étendue et une profondeur plus ou moins grandes, une notable portion de la surface terrestre tout entière.

Les éléments minéraux qui constituent ces dépôts ne sont pas unis en une masse continue, mais laissent entre eux, suivant leurs dimensions et leur nature, des intervalles plus ou moins considérables, qui communiquent les uns avec les autres et qui sont traversés ou pénétrés par l'eau.

Ces phénomènes, qu'on peut comprendre sous le nom de perméabilité, attirent à plus d'un titre notre attention. Si l'on considère que les roches cohérentes sédimentaires et même certaines roches cristallines sont provenues de semblables dépôts, on ne saurait nier qu'il importe, comme point de départ de toute notion exacte concernant le mode de formation de ces roches, de connaître les lois suivant lesquelles l'eau pénètre les dépôts en question; car l'eau est l'élément mobile, sans l'intervention duquel aucune action chimico-géologique ne s'accomplit.

Mais la perméabilité nous intéresse aussi, à un haut degré, sous le rapport pratique. La construction des digues au bord de la mer, autour des polders et le long des canaux, se fait aujourd'hui d'après des règles empiriques, non appuyées sur la théorie; parfois même elle s'exécute, pour ainsi dire, à l'aventure. Armé de la connaissance des lois de la perméabilité, on pourra mieux déterminer les conditions les plus favorables à la défense du sol contre l'envahissement des eaux. Pour le forage des puits artésiens, pour la filtration des eaux, en grand ou en petit, enfin pour les opérations agricoles elles-mêmes, cette connaissance sera également d'une incontestable utilité.

J'ai cherché, en premier lieu, à m'éclairer par l'étude de ce qui a été écrit sur cette matière.

Quelques expériences ont été faites par M. Darcy [1]) au sujet de la perméabilité des couches de sable dans les appareils à filtrer l'eau. Elles ont conduit à ce résultat, que la perméabilité des couches de sable est proportionnelle à la hauteur de la colonne d'eau qui pèse sur elles et inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche qui doit être traversée; ensuite, que la vitesse du passage dépend de la grosseur des grains de sable.

Ces résultats ont été confirmés en partie seulement par les recherches de M. Hagen [2]). Cet observateur, en effet, a apprécié de la même manière que M. Darcy l'influence de l'épaisseur de la couche, mais il n'a pas trouvé un rapport constant entre la quantité d'eau transmise et la hauteur de pression $h + H$, h désignant l'épaisseur de la couche de sable et H la hauteur du niveau de l'eau au-dessus de la surface de cette couche. Ses observations s'accordent avec une expression de la forme

$$h + H = x + M h \,.\, z,$$

où l'on a trouvé $x = 1{,}5$.

---

[1]) *Les fontaines publiques de la ville de Lyon*, par Henri Darcy, Paris, 1856.

J. Dupuit, *Traité théorique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux*, Paris, 1865.

[2]) *Handbuch der Wasserbaukunde*, Berlin, 1869.

La valeur la plus probable de la quantité d'eau qui passe par pouce carré (mesure du Rhin), dans l'espace d'une minute, est, exprimée en pouces cubes,

$$M = 0{,}66 \frac{h + H - 1{,}5}{h}.$$

Les quantités d'eau que fournissent des bassins de filtration tels que les a construits M. Darcy sont, d'après M. Hagen, beaucoup plus petites que celles trouvées par lui-même.

Le dernier expérimentateur qui s'est occupé de ce sujet est M. P. Harting [1]). De ses expériences, continuées pendant plusieurs années et ayant porté sur le sable et l'argile, il ressort que la vitesse de passage n'est pas constante, mais que, même après avoir été traversées par l'eau pendant des mois entiers, les couches subissent encore une condensation.

M. Harting n'a pas déduit de résultats numériques de ses recherches.

Quelques objections ont été faites à ce travail par M. F. J. Stieltjes [2]); il est inutile de les détailler ici, vu que, en ce qu'elles ont de fondé, elles trouveront plus loin leur explication naturelle.

Comme les recherches que je viens de mentionner étaient incomplètes et se contredisaient en partie, je résolus de soumettre la question à une étude nouvelle, faite avec tout le soin possible. Les résultats de cette étude sont exposés dans ce qui suit.

Les matières sur lesquelles j'ai opéré ont été tirées du sol néerlandais et comprennent le sable, le calcaire et l'argile. Ces trois substances et leurs mélanges constituent les éléments principaux et constants du sol, tandis que les autres éléments n'y jouent qu'un rôle accessoire et ne s'y trouvent qu'en petite quantité; plusieurs de ceux-ci, tels que les éléments organiques, par exemple, semblent d'ailleurs se prêter moins bien à une étude de ce genre, à cause de leur composition très variable et très complexe.

---

[1]) *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetensch. Afd. Natuurk.*, 2e Sér., t. XIII.

[2]) *Versl. en Meded.*, t. XII, 2e cahier.

Tout d'abord, il est évident que les recherches ne peuvent conduire à des résultats utiles que si l'on opère sur des matières purifiées. Celles-ci peuvent ensuite être mêlées ensemble, de manière à reproduire environ la composition des mélanges naturels.

La purification a eu lieu de la manière suivante. Le sable était mis à digérer avec de l'acide chlorhydrique concentré, pour décomposer le carbonate de chaux et les combinaisons silicatées solubles; il était alors lavé, bouilli avec une solution de carbonate de soude, et lavé de nouveau. Après l'avoir séché, on le fondait avec du bisulfate de potasse pour le débarrasser de l'argile, puis on le lavait, on le faisait bouillir avec une lessive de potasse, on le lavait de nouveau, on le séchait, enfin on le calcinait pour détruire la matière organique. Ces opérations n'altèrent en rien le sable lui-même, et il n'est guère possible d'enlever d'une autre manière les impuretés, qui adhèrent avec force. Même après ce traitement, toutefois, le sable n'est pas encore chimiquement pur, car on y trouve toujours quelques grains de hornblende et, çà et là, une lamelle de mica. Mais, pour le but que je me proposais, cela n'avait que peu d'importance. Le sable purifié était passé par une série de tamis et partagé ainsi en quatre lots, dans chacun desquels les grains avaient la même grosseur, du moins autant que cette égalité peut être obtenue au moyen de tamisages.

L'argile devait également subir une purification. Non-seulement, ce que l'on nomme habituellement argile est souvent un mélange d'argile, de sable, de calcaire et d'autres matières, mélange où l'argile véritable n'entre parfois que pour un dixième de la masse; mais, de plus, cette argile proprement dite est elle-même, soit dès son origine, soit à raison de phénomènes de décomposition postérieurs, mêlée, en proportions très inégales, à une série de silicates différents. Lorsque ceux-ci ont aussi été éliminés, l'argile qu'on trouve en Hollande a ordinairement la composition normale: Al_2O_3, $2SiO_2 + H_2O$ [1]).

---

[1]) Voir mon Mémoire: *De grondboringen in Nederland. Kon. Akad. v. Wetensch*

L'argile dont je me suis servi avait été purifiée par des traitement successifs à l'acide et à l'alcali et par la lévigation; séchée ensuite à 60°, elle présentait à l'analyse la composition suivante:

acide silicique	45,54
alumine.	38,77
eau	15,69
	100,00

qui répond à la formule $Al_2 O_3$, $2 Si O_2 + 2,3 H_2 O$.

Si l'on employait, au contraire, de l'argile impure, la perméabilité trouvée ne s'appliquerait qu'à ce mélange particulier, et, même pour ce mélange, n'aurait qu'une valeur médiocre, attendu que, dans les tubes où l'on opère, les particules peuvent prendre un arrangement différent de celui qu'elles avaient dans le gîte naturel. Pour découvrir une loi dans les phénomènes de perméabilité de l'argile, ce serait donc suivre une voie très impropre que d'expérimenter sur des mélanges impurs, de composition inconnue.

En ce qui concerne le calcaire, enfin, on a fait choix de la craie, parce que c'est ordinairement de cette roche que provient le carbonate de chaux existant dans le sol de la Néerlande. Toutefois, la craie aussi a été débarrassée autant que possible, par l'ébullition avec une lessive de potasse et par la lévigation, de la silice et d'autres matières étrangères.

Dans l'étude expérimentale je me suis posé les questions suivantes:

En ce qui concerne le sable:

1. La quantité d'eau que laisse passer le sable est-elle, à conditions égales, toujours la même?

2. Comment cette quantité dépend-elle de la hauteur de la colonne d'eau qui pèse sur le sable?

3. Comment dépend-elle de l'épaisseur de la couche sableuse traversée?

4. Comment dépend-elle de la section verticale de la couche traversée, et les parois des tubes où l'on opère ont-elles quelque influence sur cette quantité?

5. Comment la quantité d'eau transmise dépend-elle de la température de cette eau?

6. Comment dépend-elle de la grosseur des grains de sable, ou de la grandeur des interstices qu'ils laissent entre eux?

7. Quelle est la valeur de la constante du frottement?

8. Comment l'écoulement de l'eau se fait-il à travers des couches de sable superposées, différentes quant à la finesse du grain?

9. Comment se fait-il à travers des mélanges sableux dont les grains individuels ne diffèrent pas assez en grandeur pour que les plus petits puissent se loger dans les intervalles des grands?

10. Comment se fait-il à travers des mélanges sableux dont les grains diffèrent assez en grandeur pour que les petits puissent se placer dans les intervalles des grands?

En ce qui concerne l'argile:

11. Comment la perméabilité dépend-elle de la hauteur de la colonne d'eau?

12. De l'épaisseur de la couche d'argile traversée?

13. De la température de l'eau?

14. De la quantité d'eau associée avec l'argile à l'état de masse plastique ou à l'état de vase?

15. Quelle est la constante du frottement pour l'argile?

En ce qui concerne le calcaire:

16. Comment se comporte le calcaire pour des hauteurs différentes de la colonne d'eau?

17. Comment pour des d'épaisseurs différentes de la couche calcaire?

18. Pour des températures différentes?

19. Pour des différences dans la quantité d'eau mêlée au calcaire?

20. Quelle est la constante du frottement pour le calcaire?

21. Comment se comportent les mélanges de calcaire et d'argile?

22. Comment se comportent les mélanges de sable et d'argile?

23. De sable et de calcaire?

24. De sable, d'argile et de calcaire?

25. Quelles conclusions générales peut-on tirer de la solution de ces questions?

La méthode la plus propre à élucider ces questions ne fut pas trouvée d'emblée; des recherches préliminaires durent être faites. Mais, pour abréger, je ne m'arrêterai pas à ces essais préliminaires, et j'aborderai immédiatement la description de la méthode qui a le mieux répondu à l'attente.

Je remarquerai, en premier lieu, que l'eau servant aux expériences était de l'eau de pluie deux fois filtrée, une fois à travers un filtre de papier, et une fois à travers un filtre composé de couches alternatives de fragments de verre et de ouate. Cette seconde filtration fut reconnue nécessaire, parce que l'eau passée à travers le papier déposait encore sur la ouate, au bout de quelque temps, une couche grise d'impuretés. Si l'on néglige de filtrer l'eau, la couche de sable à travers laquelle on la laisse couler agit elle-même à la manière d'un filtre; les interstices entre les grains ténus du sable se bouchent plus ou moins complétement, et la quantité d'eau écoulée diminue rapidement. C'est là la faute la plus grave qu'on puisse commettre dans ces recherches.

L'appareil dont j'ai fait usage se composait essentiellement des parties suivantes:

1. Du tube à pression. C'était un tube large de 4 centimètres et haut de 1 mètre ½, sur lequel pouvait encore être placée une rallonge, de sorte que la hauteur totale était alors de 2,5 mètres; une échelle était tracée sur le tube.

Dans le tube à pression débouchait l'une des branches d'un long siphon, laquelle branche portait un filtre de ouate à son extrémité inférieure; l'autre branche du siphon plongeait dans un vase plein d'eau, dont le niveau était maintenu constant au moyen d'un flacon de Mariotte.

Le siphon avait encore une troisième branche, qui s'élevait au-dessus des deux autres (voir Pl. IX, fig. 1), et par laquelle on amorçait le siphon. Cette branche servait en outre à laisser échapper les bulles d'air qui pénètrent facilement dans le siphon, dont elles entravent le fonctionnement normal.

Le siphon était suspendu à une petite poulie et pouvait être aisément placé à toutes les hauteurs voulues.

Cette disposition permet de maintenir l'eau à un niveau rigoureusement constant dans le tube à pression.

2. La seconde partie de l'appareil était le tube au sable. Les tubes employés avaient des dimensions différentes, que j'indiquerai à l'occasion des expériences auxquelles ils se rapportent; c'étaient ordinairement des tubes en U à branches égales, placés dans une position verticale. Les tubes en U ont le grand avantage que la pression de la colonne d'eau peut être exactement mesurée à partir de l'ouverture du tube en U, et qu'ainsi se trouve entièrement éliminée la pression que l'eau exerce entre les grains du sable (cas dont il sera traité séparément).

Le tube au sable était pesé, d'abord vide et ensuite rempli d'eau; après cela, on procédait au chargement, de la manière suivante. Le sable était bouilli sous l'eau dans une capsule, pour chasser l'air, puis il était introduit peu à peu dans le tube entièrement plein d'eau; la descente du sable est alors facile et le tube se remplit uniformément. On le frappait ensuite à petits coups sur un corps dur, pour que le sable se tassât, puis on y introduisait de nouveau du sable, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne fût plus possible d'y rien faire entrer. De cette façon, aucune bulle d'air ne peut rester dans le tube, et tous les interstices sont entièrement remplis d'eau. Le tube ainsi chargé était pesé de nouveau.

Tout d'abord, un fait des plus imprévus se dégagea de ces pesées.

Les expériences se faisaient avec du sable de mer, du sable de bruyère et du sable de la rivière le Lek. Or, quand on pesait le tube rempli de sable préparé, il se trouvait que le poids était toujours le même, sur quelque espèce de sable qu'on eût opéré et quelle que fût la différence de grosseur des grains de ces différentes espèces. Non-seulement le tube rempli de sable et d'eau avait pour toutes ces espèces le même poids, mais la quantité de sable que le tube pouvait contenir était aussi la même pour toutes, ainsi qu'on s'en assurait en faisant couler le sable dans une capsule tarée, puis séchant et pesant. Il suit de là que, en

troisième lieu, la quantité d'eau comprise entre les grains de sable est aussi la même pour toutes les espèces de sable examinées, après purification préalable. (Les poids, pour des tubes donnés, seront communiqués plus loin).

Si les grains de sable étaient tous exactement sphériques, le rapport constant du volume des sphères à celui des espaces qui les séparent, dans l'état de densité maximum, pourrait être calculé d'après la théorie des piles de boulets. Mais les grains de sable sont polyédriques, et le rapport entre le sable et l'eau diffère de celui qui existe entre des sphères et leurs intervalles. Cela n'empêche pas, toutefois, que dans le sable, à cause du grand nombre des grains, toutes les inégalités de forme se compensent de telle sorte que le rapport devient constant.

Ce résultat était de la plus haute importance pour la suite de mes recherches, attendu qu'il fournissait un signe auquel on reconnaissait, en opérant sur des sables différents, qu'on avait toujours le même degré de condensation dans le tube, ce qui rendait les expériences comparables entre elles. Les différences de poids du tube chargé s'élevaient rarement à plus de quelques centigrammes, vu que le tube, dressé à l'émeri à son extrémité supérieure, pouvait être raclé exactement.

Les angles des grains du sable du mer sont plus arrondis que ceux du sable du Lek, lequel est un peu plus rude au toucher; le microscope permet aussi de constater cette différence.

La forme des grains de sable, si diverse qu'elle puisse être, se rapproche pourtant, *en moyenne*, d'une forme déterminée, laquelle paraît être un rhomboèdre, circonstance probablement liée à la direction des clivages dans les cristaux de quartz.

En tout cas, le fait que la diversité de forme des grains, au moins pour les sables employés, n'a pas d'influence sur la perméabilité, ce fait trouvera plus loin, quand nous nous occuperons de l'influence de la grosseur des grains, une preuve encore plus péremptoire que celle qui se déduit de la constance de poids, dont il vient d'être question.

Le tube chargé de sable était fixé par une de ses extrémités

au tube à pression, de façon que l'eau y eût librement accès; l'ouverture de cette branche du tube n'est pas couverte; comme l'eau n'y pénètre que très lentement, elle ne produit aucune agitation dans le sable. Pour empêcher que du sable ne soit chassé, par la pression, de l'autre branche du tube, voici la disposition qui a été adoptée. Un cylindre en cuivre, de 5 centim. de hauteur et d'un diamètre trois fois aussi grand que celui du tube à sable, est partagé, par un crible métallique soudé transversalement en son milieu, en deux moitiés cylindriques égales. Ce cylindre s'adapte par un bouchon de caoutchouc sur l'extrémité du tube rempli de sable. Comme le crible a été choisi suffisamment fin, aucun grain de sable ne peut s'échapper par ses ouvertures; comme il a une surface beaucoup plus grande que la section du tube, il laisse écouler beaucoup plus d'eau que celui-ci n'en peut fournir, et par conséquent il n'entrave en rien le passage de l'eau à travers le sable; mais il empêche complétement que ce dernier ne soit déplacé dans le tube, vu que le crible est appliqué directement sur la surface du sable. Si le crible n'est pas beaucoup plus large que la section du tube, il oppose à l'écoulement, surtout quand l'eau passe avec rapidité, une résistance très appréciable, et donne des résultats dénués de valeur.

Dans l'autre moitié du cylindre en cuivre, un second tube en U est fixé par l'une de ses branches, de la même manière que le premier, mais dans une position renversée, les ouvertures en bas. Ce tube, qui ne contient que de l'eau, est donc séparé du tube au sable par le crible.

La seconde branche de ce tube en U renversé débouche dans un entonnoir rempli d'eau, de telle sorte que les quatre ouvertures des deux tubes en U sont de niveau et placés en ligne droite. Dans l'eau de l'entonnoir plonge la boule d'un thermomètre divisé en dixièmes de degrés. A la partie inférieure de l'entonnoir est soudé un troisième tube en U, qui est muni d'un tube abducteur latéral, tandis que l'extrémité libre de ce tube en U reste ouverte.

Le tube abducteur se trouve au même niveau que les ouvertures des deux autres tubes en U et touche la paroi d'un cylindre jaugeur divisé en demi-centimètres cubes (voir fig. 1).

Au sujet des résultats expérimentaux que je vais maintenant faire connaître, je dois remarquer qu'ils ne sont valables que dans les limites entre lesquelles on a opéré; ainsi, par exemple, les coefficients de température changent pour des températures plus hautes ou plus basses que celles auxquelles les expériences ont eu lieu. Toutefois, les résultats relatifs à la pression de la colonne d'eau, à la longueur et à la section des tubes employés, etc. pourront être étendus à d'autres pressions et à d'autres dimensions des couches traversées, tant qu'on n'aura pas trouvé de raison pour laquelle, avec d'autres pressions et d'autres dimensions, les lois devraient changer. Les expériences ont toujours été combinées de façon que chacune d'elles eût une part décisive à la solution d'une question déterminée. Le nombre des expériences a été réduit à ce qui était nécessaire pour mettre en pleine évidence la loi cherchée.

I.

La quantité d'eau que laisse passer le sable est-elle, à conditions égales, toujours la même?

Un tube de 50 centim. de longueur et de $1^{cm},5$ de diamètre, qui avait été rempli, de la manière ci-dessus décrite, de sable à grains d'égale grosseur, étant traversé par un courant d'eau, à une température et sous une pression qui restaient les mêmes, l'écoulement fut trouvé constant dès le début de l'expérience; après une durée de plusieurs semaines, aucune différence appréciable ne put être constatée: les grains de sable étaient restés immobiles les uns à côté des autres, et le tube, après que l'écoulement eut cessé, était encore rempli exactement jusqu'au bord de son ouverture. Les légères trépidations qu'on produit en marchant près de l'appareil n'ont pas non plus d'effet sensible sur le fonctionnement. Quant à la série d'expériences spécialement

consacrée à établir le résultat en question, je puis m'abstenir de la rapporter ici, vu que chacune des séries suivantes est une nouvelle preuve de cette constance de l'écoulement. Nous passerons donc immédiatement à la seconde question, celle qui concerne l'influence de la pression.

II.

Comment la perméabilité dépend-elle de la hauteur de la colonne d'eau qui pèse sur le sable?

Un tube en U, rempli de sable, a donné les résultats suivants:

Pression.	Durée de l'écoulement.	Température de l'eau.	Quantité d'eau écoulée	Quantité d'eau écoulée à la température constante de 8° C, en 15 minutes.
	12 h. 10 min. à			
$1^m,5$	12 h. 25 „			
	12 h. 40 „	7°9 C.	41 cm.cub.	41,1
	12 h. 55 „	7 9 „	82 „	41,1
	1 h. 10 „	7 9 „	123 „	41,1
	1 h. 25 „	7 9 „	163,5 „	40,5
	1 h. 40 „	7 „ „	204,5 „	41,1
	1 h. 55 „	8 0 „	245,5 „	41,1
				moyenne 41,0
1 mètre	2 h. 20 min. à			
	2 h. 35 „	8°0 C.	27,5 „	27,5
	2 h. 50 „	7 9 „	55,0 „	27,6
	3 h. 5 „	7 8 „	82,5 „	27,6
	3 h. 20 „	7 8 „	109,5 „	27,1
	3 h. 35 „	7 9 „	137,0 „	27,6
	3 h. 50 „	7 9 „	164,5 „	27,6
				moyenne 27,5
½ mètre	4 h. à			
	4 h. 15 min.	8°0 C.	13,5 „	13,5
	4 h. 30 „	8 0 „	27,5 „	14,0
	4 h. 45 „	8 0 „	41,5 „	14,0
	5 h.	8 0 „	55,0 „	13,5
	5 h. 15 „	8 0 „	68,5 „	13,5
	5 h. 30 „	8 0 „	82,5 „	14,0
				moyenne 13,7

Les quantités écoulées sont entre elles comme

$$41 : 27{,}5 : 13{,}7 = 3 : 2{,}01 : 1{,}00,$$

les pressions, comme 3 : 2 : 1.

On voit donc que la quantité d'eau transmise par un tube en U rempli de sable est proportionnelle à la pression, ce qui peut être exprimé par la formule

$$Q = (k)\, h,$$

où Q est la quantité d'eau, (k) une grandeur encore inconnue, et h la hauteur de pression.

Dans cette expérience, on n'a pas à s'occuper des dimensions du tube. La réduction à une même température a été faite au moyen des coefficients qui seront donnés ci-dessous, au paragraphe V.

Lorsque, au lieu de tubes en U, on emploie des tubes droits, verticaux, il faut aussi tenir compte de la pression exercée par l'eau contenue dans la colonne de sable, et M. G. Hagen (*l. c.*) a trouvé que l'augmentation de pression qui en résulte est égale à la hauteur de cette colonne, diminuée de la hauteur à laquelle l'eau est soulevée dans le sable en vertu de la capillarité.

Cette dernière hauteur a été déterminée par M. Hagen en posant sur une assiette un cylindre rempli de sable, puis versant de l'eau dans l'assiette; pour le sable sur lequel il opérait, et dont la grosseur des grains n'est pas connue, l'eau était soulevée à une hauteur de 18 lignes (du Rhin).

Comme le sable contient de l'air, qui n'est pas expulsé par l'eau et qui gêne considérablement l'ascension, j'ai cherché à déterminer la capillarité d'une autre manière.

Trois tubes de verre, pourvus d'un crible en dessous, furent chargés, comme il a été expliqué précédemment, de trois sortes de sables, chacun d'une grosseur différente de grain; puis les tubes furent placés sur l'eau, de façon que leur extrémité inférieure touchât seulement la surface du liquide. Je déterminai alors de combien l'eau s'abaissait dans les tubes, c'est-à-dire, à quelle hauteur elle restait stationnaire; c'est un point qu'il est facile d'observer, attendu que sur la portion du tube d'où l'eau s'est

retirée la lumière éprouve en partie une réflexion totale, de sorte que cette portion devient plus ou moins brillante. Nous distinguerons les trois sortes de sables, en allant du plus gros au plus fin, par les numéros 1, 2, et 3. Les hauteurs des colonnes d'eau retenues dans les tubes s'élevaient à:

N°. 1 = 10 cm., N°. 2 = 15 cm., N°. 3 = 30 cm.

Dans les tubes capillaires, les hauteurs de l'eau sont en raison inverse des diamètres des tubes. Si les interstices des grains de sable se comportent comme des tubes capillaires, le même rapport devra donc exister ici.

Pour s'en assurer, il fallait connaître les diamètres des espaces capillaires qui restent entre les grains de sable. Comme nous avons déjà trouvé que le volume du sable est à celui des interstices dans un rapport constant, on peut aussi, au lieu des interstices, prendre le volume des grains de sable; en d'autres termes, les hauteurs de l'eau doivent être entre elles comme les rayons des grains de sable.

La grosseur des grains de sable sera déterminée au paragraphe VI; je fais ici usage par anticipation des chiffres auxquels cet examen conduira.

Le poids d'un grain de sable est:

pour le N°. 1 . . . . . 0gr,0004288
„ „ „ 2 . . . . . 0 ,0001525
„ „ „ 3 . . . . . 0 ,00001646.

En comparant avec ces nombres les hauteurs d'ascension de l'eau dans les tubes, c'est-à-dire

N°. 1 . . . . . 10 centim.
„ 2 . . . . . 15 „
„ 3 . . . . . 30 „ ,

on voit que celles-ci sont en raison inverse des racines cubiques des poids des grains, et par conséquent en raison inverse des diamètres de ces grains. Ces diamètres, en effet, sont entre eux comme les nombres

N°. 1 = 16,24
„ 2 = 11,55
„ 3 = 5,48.

La loi ci-dessus rappelée de la hauteur d'ascension dans les tubes capillaires se vérifie donc pour les masses de sable, car la hauteur d'ascension est au diamètre des grains dans le rapport inverse des nombres:

	N°. 1 : N°. 2	N°. 2 : N°. 3	N°. 1 : N°. 3
Hauteur d'ascension	1 : 1,5	1,5 : 3	1 : 3
Diamètre du grain	1,5 : 1,06	3 : 1,42	3 : 1,01

Si l'on tient compte de l'extrême difficulté que présente la détermination de la grosseur d'un grain de sable isolé, on trouvera cet accord très satisfaisant.

Les colonnes d'eau qui sont retenues dans le sable par l'effet de la capillarité ne peuvent naturellement pas exercer de pression, et par conséquent, si le raisonnement et les expériences de M. G. Hagen sont corrects, il n'y a à tenir compte, pour la pression, que de la hauteur H de la colonne de sable, diminuée de la hauteur H' de la colonne d'eau retenue par la capillarité.

Pour contrôler l'exactitude de la manière de voir de M. Hagen, j'ai fait les expériences suivantes.

Un tube droit, portant à son extrémité un crible dont le diamètre était trois fois plus grand que celui du tube, fut chargé de sable N°. 1 par le procédé qui a été décrit. La longueur de la colonne de sable s'élevait à 50 centim. La pression h, calculée à partir de la surface de cette colonne verticale, était de 150 centim. Une seconde série d'expériences fut ensuite exécutée avec une pression h de 50 centim. Voici les résultats obtenus:

Pression h = 150 cm., épaisseur de la colonne de sable 50 = cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.	Quantité d'eau en 10 minutes.
1 h. 18 m.	15° 8 C.		
1 „ 28 „		22,5	22,5
1 „ 38 „		45,5	23
1 „ 48 „		68,1	22,6
1 „ 58 „		91,1	23
2 „ 8 „		113,1	22
2 „ 18 „		135,1	22
2 „ 28 „		157,6	22,5
2 „ 38 „		180,6	23
			moyenne 22,5

Pression $h = 50$ cm., épaisseur de la colonne de sable $= 50$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.	Quantité d'eau en 10 minutes.
3 h.			
3 „ 10 m.		11,25	11,25
3 „ 20 „	15° 8 C.	22,75	11,5
3 „ 30 „		34,25	11,5
3 „ 40 „		45,25	11
3 „ 50 „		56,75	11,5
4 „		68,25	11,5
4 „ 10 „		79,25	11
4 „ 20 „		90,25	11
			moyenne 11,25.

On voit que dans ces deux séries d'expériences les quantités d'eau écoulées ont été exactement dans le rapport de 2 : 1.

La pression h de la première série, augmentée de l'épaisseur de la colonne de sable, donne 200 centim.

Dans la seconde série, la pression était $h = 50$ cm.; en y ajoutant la hauteur de la colonne de sable $= 50$ cm., on a un total de 100 cm.

Les pressions sont donc dans le même rapport 2 : 1 que les quantités d'eau écoulée, quand on tient compte de la hauteur entière de la colonne de sable; quant à une influence de la capillarité, il n'y en a pas trace dans l'expérience.

Il suit de là que, pour des tubes verticaux, l'épaisseur totale de la couche de sable doit être ajoutée à la pression h. Il est d'ailleurs facile de comprendre que dans une colonne verticale de sable, sur laquelle repose encore une colonne d'eau, aucune action capillaire ne peut se faire sentir; car l'ascension de l'eau dans un tube capillaire est la conséquence de la formation d'un ménisque, et celui-ci, dans le cas où une colonne d'eau s'élève au-dessus du tube capillaire, vient se placer dans le large tube de pression, où son action est si petite qu'elle s'évanouit en quelque sorte.

Si, dans les conditions supposées en dernier lieu, une partie de la pression était contre-balancée par la capillarité, le phéno-

mène accusé par l'expérience suivante ne pourrait pas non plus avoir lieu.

Un tube droit chargé de sable, et muni d'un crible à son extrémité inférieure, est relié par un large tube de caoutchouc à un autre tube droit, mais vide, de manière que l'ensemble forme un long tube en U; dans un second tube vide, fixé au sommet du tube rempli de sable, on verse de l'eau, qui doit donc traverser la couche de sable pour arriver dans la branche vide du tube en U (fig. 2).

Si le sable, par son action capillaire, compensait une partie de la pression exercée par l'eau, il faudrait, l'état d'équilibre une fois établi dans les deux branches du tube en U, et l'eau s'élevant au-dessus du sable dans la branche chargée, il faudrait, dis-je, que le niveau de l'eau fût plus bas dans la branche restée vide.

Or, l'expérience montre qu'au bout de quelques heures l'eau se trouve exactement au même niveau dans les deux branches du tube en U.

Cette expérience est donc une nouvelle preuve que, dans les conditions dont il s'agit, aucune partie de la pression n'est détruite par l'effet de la capillarité.

Ainsi se trouvent réfutées, à mon avis, les déductions et les expériences de M. Hagen, et l'écoulement à travers un tube vertical rempli de sable est représenté par la formule

$$Q = (k)\, h + H',$$

où les lettres ont la signification qui leur a été attribuée ci-dessus.

Quand les conditions sont différentes, c'est-à-dire, lorsque la couche de sable ne supporte pas la pression d'une colonne d'eau supérieure, mais que le niveau de l'eau se trouve dans la couche même, — cas qui peut se présenter entre autres dans les puits artésiens et les sources, — l'action capillaire doit au contraire être prise en considération. Il se forme alors des ménisques dans la couche de sable, lesquels réduisent la pression totale d'une quantité équivalente à la hauteur de la colonne d'eau soulevée.

Cette hauteur H' est une constante, inversement proportionnelle au diamètre des tubes capillaires.

Nous pouvons donc, au lieu de H', écrire $\frac{C}{r}$, où C désigne la constante de la capillarité et r le rayon de la section horizontale d'un des interstices des grains de sable.

Voici de quelle manière on peut trouver cette section. Le rapport entre le volume des grains de sable et celui de l'eau est connu d'après le paragraphe IX, et comme on peut admettre, à raison du grand nombre des grains de sable, que dans une section du tube il y a autant d'interstices que de grains, le rapport du volume d'une grain unique à celui d'un interstice unique sera le même que celui de leurs sommes.

Ce rapport est $\frac{103,39}{2,635} : 22,72 = 1,729$, le nombre 2,635 représentant la densité du sable.

Les interstices, ramenés par la pensée à la forme sphérique, auraient pour rayon

$$\text{N}^{\text{o}}.\ 1\quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{0,0004288}{1,729.2,63}} = 0,02819 \text{ cm.}$$

$$\text{N}^{\text{o}}.\ 2\quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{0,0001525}{1,729.2,63}} = 0.02000 \quad ,,$$

$$\text{N}^{\text{o}}.\ 3\quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{0,00001646}{1,729\ .2,63}} = 0,009526 \quad ,,$$

Les hauteurs d'ascension sont:

N°. 1 . . . . . $H' = 10$ cm.
N°. 2 . . . . . $H' = 15$ „
N°. 3 . . . . . $H' = 30$ „

C est donc exprimé en millimètres par

N°. 1 . . . . . $C = 28,19$ mm.
N°. 2 . . . . . $C = 30,00$ „
N°. 3 . . . . . $C = 28,57$ „

moyenne . . . 28,92 mm.

La formule pour l'écoulement devient alors

$$Q = (k)\,(H - \frac{28,9}{r}\text{ mm.});$$

h est donc ici égal à zéro.

III.

Pour résoudre la troisième question : comment la quantité d'eau transmise dépend-elle de l'épaisseur de la couche de sable traversée ? on a employé deux tubes en U. Ces deux tubes avaient été faits d'un tube droit présentant un calibre bien égal, et ils étaient par conséquent de la même largeur ; leurs extrémités avaient été usées de façon que les longueurs des deux tubes fussent dans le rapport de 2 : 1. A l'endroit de la courbure ils avaient été légèrement soufflés à la lampe, de manière à offrir en cet endroit un peu plus de largeur que dans les parties droites. L'écoulement se règle d'après la partie la plus étroite du tube, et un rétrécissement inégal, tel qu'il s'en produit facilement dans l'opération de la courbure, aurait de l'influence sur la quantité d'eau écoulée. C'est pour prévenir cet effet que la partie courbe avait été légèrement dilatée. Les expériences faites avec ces tubes, après qu'ils eurent été remplis de sable et introduits dans l'appareil décrit, ont donné les résultats suivants :

Tube long; pression ½ m.

Temps.	Tempér.	Ecoulement en 30 minutes.	
2 h. 5 m.			
2 „ 35 „	8°,2′	8,5 cc.	8,5 cc.
3 „ 5	7 ,9	16,5 „	8 „
3 „ 35 „	7 ,9	24,5 „	8 „
4 „ 5 „	7 ,9	32,5 „	8 „
4 „ 35 „	8	40,5 „	8 „
5 „ 5 „	8	49 „	8,5 „
		moyenne	8,3 cc.

Tube court; pression ½ m.

Temps.	Tempér.	Ecoulement en 30 minutes.	
9 h. 40 m.	8°,3′	17,7 cc.	17,7 cc.
10 „ 10 „			
10 „ 40 „	8	34,7 „	17 „
11 „ 10 „	7 ,8	51 „	16,3 „
11 „ 40 „	7 ,9	68 „	17 „
12 „ 10 „	7 ,9	85 „	17 „
12 „ 40 „	8	101,5 „	16,5 „
		moyenne	16,8 „

Les expériences avaient lieu dans un local non chauffé, où la température était tant soit peu plus haute qu'à l'air libre. En allumant une série de becs de Bunsen et en ouvrant une fenêtre, on obtenait que cette température ne variât pas de plus d'un demi-degré dans le cours de l'expérience.

Il résulte de ces expériences que les quantités d'eau écoulées sont entre elles comme 1 : 2, c'est-à-dire, inversement proportionnelles aux épaisseurs des couches de sable. La quantité d'eau écoulée est donc exprimée par la formule

$$Q = \frac{(K)}{L},$$

où L désigne l'épaisseur de la couche.

Ce résultat est conforme à celui qui a été obtenu, comme nous l'avons dit, par d'autres observateurs.

IV.

Comment la quantité d'eau écoulée dépend-elle de la section de la couche de sable? Les parois des tubes ont-elles quelque influence?

On a pris deux tubes droits bien cylindriques, de même diamètre aux deux extrémités, et qui avaient été usés aux deux bouts de manière que leurs longueurs fussent égales.

Les diamètres étaient de $1^m,825$ et $1^m,30$. Les sections trans-

versales étaient donc entre elles dans le rapport des carrés de ces nombres : 3,3306 : 1,690 = 2 : 1,014.

Un crible ayant été fixé à l'extrémité inférieure de chacun des tubes, ceux-ci furent chargés de sable de la même espèce. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant:

Sable N°. 3.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, $D = 1,825$ cm.

Temps.	Tempér.	Quantité d'eau écoulée.	Quantité d'eau en 5 minutes.
9 h. 10 m.	11°,4		
9 „ 15 „		30 cc.	30 cc.
9 „ 20 „		59 „	29 „
9 „ 25 „		88 „	29 „
9 „ 30 „		117 „	29 „
9 „ 35 „		147 „	30 „
9 „ 40 „		177 „	30 „
9 „ 45 „		207 „	30 „
9 „ 50 „		237 „	30 „
			moyenne 29.6 cc.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, $D = 1,30$ cm.

11 h. 50 m.	11°,2	15 cc.	15 cc.
55 „		30 „	15 „
12 „		44,5 „	14,5 „
12 „ 5 „		59,5 „	15 „
12 „ 10 „		74 „	14,5 „
12 „ 15 „		89 „	15 „
12 „ 20 „		103,5 „	14,5 „
12 „ 25 „		117,5 „	14,5 „
12 „ 30 „			
			moyenne 14,75 cc.

Les quantités d'eau écoulée sont donc entre elles comme 2 : 0,996, tandis que les sections des tubes sont dans le rapport 2 : 1,014.

On voit que le rapport des quantités écoulées ne diffère pas sensiblement de celui des sections, et que ces quantités sont

par conséquent proportionnelles aux carrés des diamètres des couches traversées, ce qui s'exprime par la formule:

$$Q = (K)\, D^2.$$

D'après ces expériences, l'influence des parois des tubes est donc si faible qu'elle tombe dans les limites des erreurs d'observation. Cette influence ne peut pourtant pas être tout à fait nulle, puisque, pour des diamètres croissants, la surface de la paroi augmente proportionnellement au diamètre, tandis que la capacité du tube augmente proportionnellement au carré de ce diamètre. A priori, il semble évident que la paroi ne peut agir que dans un seul sens, à savoir en augmentant l'écoulement. Si cette influence était appréciable, la quantité d'eau écoulée par le tube étroit devrait donc être augmentée dans une proportion plus forte que celle écoulée par le tube large. Bien qu'on ne puisse savoir exactement de combien les interstices entre la paroi et les grains de sable sont plus grands que les interstices entre les grains de sable eux-mêmes, il y a peut-être moyen de le calculer approximativement et, par suite, d'évaluer la part d'influence qui pourrait revenir à la paroi. A cet effet, voici comment nous raisonnons: Admettons que les grains de sable soient des sphères, et qu'ils soient disposés de manière que le sable ait son maximum de densité; ces sphères seront alors placées les unes par rapport aux autres comme l'indique la fig. 3, et par rapport à la paroi du tube comme le représente la fig. 4, de sorte que chaque interstice borné par la paroi sera plus grand qu'un interstice compris entre les sphères d'une quantité égale au segment sphérique qu'un plan tangent ab, mené intérieurement à une série de sphères, détache de chacune des sphères qu'il coupe. Or ce segment sphérique a pour volume: segm. $= R h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi$. Le rayon d'un grain de sable supposé sphérique est $R = 0{,}01143$ cm. On a aussi $h = R\,(2 - \sqrt{3})$, par conséquent:

$$\text{segm.} = \tfrac{1}{3}\pi R^3 (3\sqrt{3} - 5) = 0{,}000000306 \text{ cm}^3,$$
$$\text{vol. du grain de sable} = 0{,}00000626 \text{ cm}^3.$$

Le volume du grain est donc à celui du segment comme

$$20{,}45 : 1.$$

Le volume de l'interstice est à celui du segment comme

$$11{,}82 : 1.$$

Mais cette augmentation de $\frac{1}{11{,}82}$ ne s'applique qu'aux interstices contigus à la paroi du tube, c'est-à-dire, seulement à $\frac{1}{15}$ du nombre total dans le tube large et à $\frac{1}{10}$ dans le tube étroit. L'accroissement total que le volume des interstices éprouve par suite de la présence de la paroi s'élève donc dans le tube large à $\frac{1}{11{,}8.15} = \frac{1}{177}$, dans le tube étroit à $\frac{1}{11{,}8.10} = \frac{1}{118}$.

Quoique ce calcul soit basé sur des suppositions qui s'éloignent de la réalité, il en ressort pourtant que l'influence des parois ne peut pas être assez grande pour se faire sentir dans les expériences rapportées ci-dessus.

V.

Comment la perméabilité dépend-elle de la température? Pour résoudre cette question, on procéda de la manière suivante. Dans une grande salle, dont la température restait pendant longtemps constante, une série d'expériences fut d'abord exécutée; ensuite on chauffa la salle de façon à y élever lentement la température, qu'on achevait de régler, au besoin, en allumant un certain nombre de brûleurs de Bunsen. Les lectures avaient lieu de 15 en 15 minutes, et on prenait la moyenne des deux températures du commencement et de la fin de chacune de ces périodes. Le tube contenant le sable était en forme d'U et avait été préparé de la manière ci-dessus décrite.

Voici les résultats obtenus:

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.			
15 min.	9° C.	94 cc.,	94,5 cc.,	95 cc.,	93,5 cc.
„	10 „	96 „			
„	11 „	98 „			
„	12 „	100 „			
„	13 „	102,5 „			
„	14 „	105,5 „			
„	14 ,5„	106,5 „			
„	15 „	108 „			
„	15 ,5„	109,5 „			
„	16 „	111 „			
„	17 „	114 „			
„	18 „	117 „			
„	19 „	120 cc.,	120 cc.,	120,5 cc.	
„	19 ,5„	122 „			

Traités par la méthode des moindres carrés, ces résultats conduisent aux équations:

$$\alpha\ 14 + \beta\ 203°,5 + \gamma\ 3096°,75 = 1504 \text{ cc.}$$
$$\alpha\ 203,5 + \beta\ 3096°,75 + \gamma\ 48991°,375 = 22234 \text{ „}$$
$$\alpha\ 3096°,75 + \beta\ 48991°,375 + \gamma\ 800379° = 343452 \text{ „}$$

qui permettent de déterminer α, β et γ. On trouve

$$\alpha = 79,348$$
$$\beta = 1,081$$
$$\gamma = 0,0559.$$

D'après ces données, la loi qui lie l'écoulement à la température peut donc être exprimée par la formule

$$Q = (79,346)\,(1 + 0,0136\,t + 0,000704\,t^2).$$

Les coefficients de cette formule valent pour les températures comprises entre 9° et 19°,5 C.

La constante α convient seulement pour les dimensions du tube employé dans ces expériences; il n'y a d'ailleurs pas lieu de s'y arrêter, attendu que la constante générale sera déterminée plus loin.

VI.

Comment la perméabilité dépend-elle de la grosseur des grains de sable, ou de la grandeur des interstices qu'ils laissent entre eux ?

La solution de cette question présentait de grandes difficultés, parce qu'il fallait déterminer exactement le volume moyen du grain de sable individuel.

On a employé quatre sortes de sable, obtenues par le tamisage d'un sable qui avait été purifié par le procédé décrit plus haut. Nous désignerons ces quatre sortes, en allant de la plus grossière à la plus fine, par les Nos 1, 2, 3 et 4.

Deux voies peuvent conduire à la connaissance de la grosseur du grain, à savoir, la mesure et la pesée. Je n'ai pas tardé à reconnaître, toutefois, que la première méthode, la mesure des grains sous le microscope, ne donne pas des résultats assez exacts pour la question que nous avons ici à résoudre, et en conséquence j'ai entièrement renoncé à cette méthode.

La détermination par la pesée a eu lieu de la manière suivante : Une plaque de verre, formant un carré d'environ 8 centim. de côté, fut divisée au diamant en 100 petits carreaux, sur chacun desquels on inscrivit un numéro. Une heure avant la pesée, cette plaque de verre était introduite sous la cage de la balance, afin qu'elle pût se mettre en équilibre avec la température et le degré d'humidité qui régnaient dans cette cage. On versait alors avec précaution, au centre de la plaque, une petite quantité de sable, dont on déterminait le poids, autant que possible, à un demi-décimilligramme près. La pesée faite, la plaque n'était pas immédiatement enlevée du plateau de la balance, mais on humectait d'abord le petit tas de sable avec quelques gouttes d'un vernis de laque à l'esprit-de-vin, pour empêcher que des grains ne roulassent à terre. Ensuite les grains étaient éparpillés, à l'aide d'un fil lisse de platine, sur tous les petits carreaux de la plaque, de façon que nulle part il ne restât deux grains accolés. La plaque restait alors encore quelques minutes sous une cloche, jusqu'à ce que le vernis fût sec. Ainsi préparée, tous

les grains y sont fixés à leur place et peuvent être comptés à la loupe; pour cette opération, on se sert d'un fond obscur.

Pour le sable le plus fin, la détermination se fit encore par une seconde méthode, la pesée directe laissant dans ce cas quelque chose à désirer, vu qu'on ne pouvait prendre qu'un très petit poids de ce sable et qu'un décimilligramme en renfermait déjà environ 20 grains.

Dans un grand creuset de porcelaine on pesa 0gr,2 du sable N°. 4, après quoi on ajouta environ 20 grammes de bichromate potassique pur et cristallisé. Ce sel fut fondu avec le sable, puis agité avec lui pendant le refroidissement jusqu'à ce que le tout fût réduit en une poudre ténue. On obtient ainsi, très facilement, un mélange uniforme de sable et de bichromate de potassium; car, en premier lieu, le bichromate fondu possède à peu près la même densité que le sable, de sorte que par l'agitation les grains se répartissent également dans toute la masse fondue, et, en second lieu, la poudre qui en résulte est encore une fois mélangée avec soin. De cette poudre, une quantité assez grande fut pesée sur un verre de montre, qui était divisé, comme la plaque, en cases numérotées; ensuite, on fit dissoudre le bichromate dans l'eau et on aspira la solution avec une pipette, opération qui fut répétée deux ou trois fois.

Le sable ayant enfin été fixé au vernis, on opéra le dénombrement des grains.

Voici les résultats obtenus:

	Poids du sable.	Nombre des grains.	Poids d'un grain.
N°. 1.	0,0789 gramme	184	0,0004288 gramme.
N°. 2.	0,0389 „	255	0,0001525 „
N°. 3.	0,0096 „	583	0,00001646 „
N°. 4.	première méthode 0,01025 gramme	1820	0,00000563 „
	seconde méthode 0,001936 „	318	0,00000609 „
		moyenne N°. 4	0,00000586 „

La grosseur des grains connue, on passa à l'étude de l'écoulement. Les quatre sortes de sable furent successivement soumises à l'expérience dans un seul et même tube en U. Ce tube se composait de trois parties: une partie inférieure, en laiton, qui faisait deux angles droits et avait deux courtes extrémités verticales; et deux tubes de verre droits, qui étaient fixés au moyen de bouchons en caoutchouc dans les ouvertures du tube en laiton, plus large que les tubes de verre. (Voir fig. 1).

Les dimensions du tube étaient:

longueur de l'axe = 40,85 centim.

diamètre de la partie en verre = 1,1 centim.

Pendant l'expérience la température était maintenue autant que possible à 12°. Quand des écarts avaient lieu sous ce rapport, les quantités d'eau écoulée étaient réduites à la température de 12° C à l'aide des coefficients trouvés au paragraphe V.

Les expériences ont donné les résultats suivants:

N°. 1.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, poids d'un grain de sable = 0,0004288 gramme.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	179,0 cc.
		181,1 „
		182,0 „
		182,3 „
		183,0 „
		179,0 „
		179,0 „
		moyenne 180,9 cc.

N°. 2.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, poids d'un grain = 0,0001525 gramme.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	89,0 cc.
		89,5 „
		88,0 „
		89,0 „
		90,0 „
		91,3 „
		91,0 „
		90,0 „
		moyenne 89,7 cc.

N°. 3.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, poids d'un grain = 0,00001646 gramme.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	21,09 cc.
		20,2 „
		21,4 „
		21,5 „
		21,5 „
		20,8 „
		20,3 „
		21,5 „
		moyenne 21,02 cc.

N°. 4.

$h = \frac{1}{2}$ mètre, poids d'un grain = 0,00000563 gramme.

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	9,5 cc.
		10,5 „
		10,5 „
		10,5 „
		10,4 „
		10,5 „
		10,3 „
		10,2 „
		moyenne 10,3 cc.

Eu prenant les moyennes des quantités d'eau écoulée, nous trouvons le rapport:

N°. 1	:	N°. 2	:	N°. 3	:	N°. 4.
180,9	:	89,7	:	21,02	:	10,3,

tandis que les poids des grains sont entre eux dans le rapport de:

N°. 1	:	N°. 2	:	N°. 3	:	N°. 4.
4288	:	1525	:	164,6	:	56,3

Il s'agit maintenant de savoir quelle relation il existe entre les quantités d'eau écoulée et les poids ou les volumes des grains de sable.

A cet effet, formons le tableau ci-dessous d'une suite de racines des poids proportionnels des grains de sable:

	N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.	N°. 4.
$\sqrt[3]{}$	16,24	11,5	5,48	3,83
$\sqrt[\frac{3}{2}]{}$	263,9	132,48	30,03	14,7
$\sqrt[\frac{3}{3}]{}$	428,8	152,5	164,6	56,3
$\sqrt[\frac{3}{4}]{}$	696,63	175,53	902,0	215,7

On reconnaît, au premier coup d'œil, que les quantités d'eau sont entre elles dans le même rapport que les nombres de la seconde ligne du tableau; ceux-ci deviennent en effet, rapportés au même terme initial,

N°. 1	:	N°. 2	:	N°. 3	:	N°. 4.
180,9	:	90,9	:	20,3	:	9,8

tandis que les quantités d'eau sont:

180,9 : 89,7 : 21,02 : 10,3

En égard à la grande difficulté des déterminations, l'accord entre ces deux séries de nombres peut être regardé comme très satisfaisant. Les autres séries du tableau des racines s'écartent beaucoup du rapport en question.

Nous arrivons donc à ce résultat, que les quantités d'eau sont proportionnelles aux racines $\frac{3}{2}$ des poids des grains, ou, en d'autres termes, aux carrés des rayons des grains, ce qui s'exprime par la formule $Q = (K)\, r^2$.

Comparons cette formule avec la loi de Poiseuille pour les tubes de verre capillaires.

Quand on part de l'idée que les interstices entre les grains de sable sont des tubes capillaires, on peut à r^2, c'est-à-dire au carré du rayon des grains de sable, substituer r'^2, c'est-à-dire, le carré du rayon des interstices; car nous avons vu plus haut que le rapport de la section horizontale d'un grain à celle d'un interstice est constant, et, vu le grand nombre des grains contenus dans le tube, on peut admettre qu'il y a égalité entre ce nombre et celui des interstices.

Or il pourrait sembler que le résultat ci-dessus obtenu, à savoir,

la proportionnalité au carré, fût en désaccord avec la loi de Poiseuille, puisque, d'après celle-ci, les quantités d'eau qui s'écoulent par des tubes capillaires sont proportionnelles aux quatrièmes puissances des rayons de ces tubes, ou

$$Q = (K)\, r^4.$$

La différence disparaît, toutefois, lorsqu'on réfléchit que, pour le sable, Q est en outre proportionnel à D^2, c'est-à-dire, à la section du tube; r^2 doit donc encore être multiplié par D^2, pour que la formule devienne comparable à celle de Poiseuille. En effet, dans le cas seulement où l'on prend deux tubes à sable dont les sections sont aussi entre elles dans le rapport des carrés des rayons des grains, dans ce cas seulement, le nombre des tubes capillaires devient égal de part et d'autre; au contraire, dans les tubes à sable qui ont servi à mes expériences, c'est-à-dire, dans des tubes de même section, le nombre des tubes capillaires est différent, tandis que la somme des sections des interstices y est le même. En remplaçant D^2 par $m\, r^2$, nous obtenons donc la formule

$$Q = K\, D^2\, r^2 = (K)\, m\, r^4,$$

où m peut être compris dans la constante.

Le résultat ci-dessus trouvé n'est donc pas en contradiction avec la loi de Poiseuille, mais prouve, au contraire, que cette loi demeure vraie pour des tubes ramifiés dans tous les sens possibles, tels que ceux qui existent entre les grains de sable. La loi de Poiseuille, obtenue pour des tubes de verre droits, est comprise dans la loi plus générale trouvée pour le sable. A ce point de vue, cette dernière intéresse donc aussi la physique pure.

Pour des tubes ramifiés en deux et en trois branches, la loi de Poiseuille a été récemment démontrée par M. J. Berthold Rostalski, Breslau, 1878.

La quatrième puissance de r, dans la formule qui vient d'être donnée, apparaît donc comme composée de deux carrés, dont l'un représente la section horizontale de l'espace traversé par le

liquide, tandis que l'autre exprime la manière dont le mouvement des particules aqueuses dépend du rayon des tubes capillaires.

Ainsi, d'une part, la quantité d'eau écoulée est proportionnelle à la section totale des ouvertures que l'eau parcourt.

D'autre part, cette quantité est proportionnelle au carré du rayon moyen des interstices particuliers.

Cette dernière loi, $Q = (K) r^2$, a la même forme que la loi de la chute libre, $S = \left(\frac{1}{2g}\right) c^2$.

Si l'on considère que la cause de l'écoulement de l'eau n'est autre que la gravité, il devient très vraisemblable que la formule $Q = K r^2$ exprime la loi de la chute des corps pesants, dans laquelle, toutefois, l'accélération g est modifiée par la cohésion des particules aqueuses entre elles ou avec le sable.

L'accord devient encore plus manifeste quand on différentie les deux expressions. On a alors

$$d\,Q = K\,2\,r\,d\,r \quad \text{et}$$
$$d\,S = K'\,2\,c\,d\,c.$$

$d\,Q$ est ici l'accroissement moyen du chemin que chaque particule d'eau parcourt, dr l'accroissement du rayon du tube capillaire. On voit que la vitesse d'écoulement, nulle à la paroi du tube, croît proportionnellement à r, de la même manière que la vitesse dans la loi de la chute, vitesse qui est nulle à l'origine du mouvement.

On peut aussi se représenter dans chaque espace capillaire un système d'anneaux liquides élémentaires de forme cylindrique, dont la somme constituerait un corps limité par la surface de révolution qu'engendre une portion de parabole; on retrouve ainsi l'expression précédente.

Notre formule renferme donc une combinaison de la loi de la chute avec la section d'écoulement, et par là elle offre un sens net à l'esprit, tandis que la formule $Q = K r^4$ n'était pas immédiatement intelligible jusqu'ici, parce qu'on n'y reconnaissait pas la loi de la chute.

Plus loin, à l'occasion des expériences sur le calcaire et l'argile, nous retrouverons encore la loi sous une troisième forme.

En réunissant dans une même formule les divers résultats auxquels nous sommes déjà parvenus, nous avons:

$$Q = K \frac{h\, D^2\, r^2}{L} (1 + 0{,}0136\, t + 0{,}000704\, t^2).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante K.

VII.

Pour trouver la constante, faisons $h = D = L = 1$ mètre, $r = \frac{1}{10}$ millim. et $t = 12^0$ C; en calculant alors r à l'aide du poids, suivant la formule $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{g}{2{,}63}}$, nous obtenons:

pour N°. 1 $K = \frac{0{,}0001809 \,.\, 0{,}4085}{0{,}000121 \,.\, 0{,}5 \,.\, 11{,}48} = 0{,}10639 = 0{,}42556$ m³. par heure.

" " 2 $K = \frac{0{,}0000897 \,.\, 0{,}4085}{0{,}000121 \,.\, 0{,}5 \,.\, 5{,}767} = 0{,}10502 = 0{,}42008$ " " "

" " 3 $K = \frac{0{,}00002102 \,.\, 0{,}4085}{0{,}000121 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1{,}307} = 0{,}10859 = 0{,}43436$ " " "

" " 4 $K = \frac{0{,}0000103 \,.\, 0{,}4085}{0{,}000121 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}6567} = 0{,}1059 = 0{,}4236$ " " "

K en moyenne . . . . . $= 0{,}106426 = 0{,}42570$ " " "

Cette valeur de K correspond à:

$h = 1$ mètre
$D = 1$ "
$L = 1$ "
$r = \frac{1}{10}$ millim.
$t = 12^0$ C.
$T = 1$ heure.

Ainsi se trouve entièrement déterminée la loi de l'écoulement de l'eau à travers du sable à grains de même grosseur.

Je ferai encore remarquer que le sable N°. 1 et N°. 2 était

du sable de mer, N°. 3 du sable de bruyère, ou sable diluvien, et N°. 4 du sable du Lek. Comme ces quatre sortes de sables obéissent à la même loi, on voit que, sous le rapport en question, l'origine du sable, pourvu qu'il soit d'ailleurs parfaitement purifié, ne fait aucune différence.

VIII.

Comment l'écoulement se fait-il à travers des couches de sable superposées, différentes quant à la finesse du grain?

Le même tube qui avait servi aux expériences mentionnées dans le paragraphe VI fut chargé de deux sortes de sable différentes, à savoir, la partie en cuivre et l'une des branches de sable N°. 4, l'autre branche de sable N°. 2.

Après que, sous l'action de chocs répétés, le sable se fut tassé de manière à ne plus éprouver de déplacement, le tube fut d'abord fixé au tube de pression par la branche remplie de sable fin; ensuite, dans une seconde série d'expériences, le tube fut retourné, de façon qu'alors l'eau traversait en premier lieu la branche chargée de sable grossier.

Les expériences donnèrent les quantités suivantes d'eau écoulée:

Sable fin en avant, sable grossier en arrière. $h = \frac{1}{2}$ mètre.

Temps.	Température réduite à	Quantité d'eau écoulée.
5 min.	12°	16,5
		17
		17
		17,1
		17,1
		17
		17
		moyenne 16,9.

Sable grossier en avant, sable fin en arrière. $h = \frac{1}{2}$ mètre.

Temps.	Température réduite à	Quantité d'eau écoulée.
5 min.	12°	17,5
		17
		17
		17,7
		17
		17,2
		17
		17
		moyenne
		17,1

De ces expériences il ressort, en premier lieu, que, toutes choses égales d'ailleurs, les quantités d'eau écoulée sont les mêmes; quand deux couches de sable sont superposées, il est donc indifférent, pour l'écoulement, que l'eau traverse d'abord le sable fin et puis le sable grossier, ou bien qu'elle les traverse en sens inverse.

La longueur de la colonne de sable fin était de $15^{cm},3$. Par le tube entier, d'une longueur de $40^{cm},85$, il s'écoule, d'après le paragraphe VI, quand le tube est entièrement rempli de sable fin, $20^{cc},2$ en 15 minutes, c'est-à-dire $6^{cc},73$ en 5 minutes. Les quantités d'eau étant en raison inverse des longueurs des tubes, il faudrait donc que le tube, s'il avait la même longueur que dans la série expérimentale VIII, fournit $\frac{40,85}{15,3} . 6,73$ cc. $= 17,9$ cc. d'eau, tandis que l'expérience n'en a donné que 17 cc. Si l'on considère que le sable fin, là où il est en contact avec le sable grossier, peut bien, d'après les dimensions de ses grains, s'insinuer un peu dans les interstices du sable grossier (quoiqu'un mélange ne puisse avoir lieu), ce qui ralentira un peu l'écoulement, on voit que la quantité d'eau trouvée doit effectivement être un peu moindre que la quantité calculée. La différence est toutefois si petite, qu'il demeure évident que le tube chargé de deux couches de sable se comporte comme si le sable fin existait seul et que le sable grossier eût été entièrement supprimé.

Ce qui vient d'être trouvé pour deux couches de sable s'applique naturellement aussi à trois ou à un plus grand nombre de couches, et nous avons donc ce résultat général, important pour la pratique: lorsque des couches de sable de différents degrés de finesse se succèdent dans des tubes en U, l'ensemble agit comme si le sable le plus fin était seul, l'influence des couches de sable plus grossier étant égale à zéro. Pour les tubes droits verticaux, la même règle subsiste, avec cette différence seulement, que la pression h doit être augmentée de toute la hauteur de la colonne verticale de sable.

Nous donnerons à cette règle, suivant laquelle la succession de couches de sable de différents degrés de finesse est sans influence sur l'écoulement, le nom de règle de la commutativité.

IX.

Comment l'écoulement se fait-il à travers des mélanges sableux dont les grains individuels ne diffèrent pas assez en grandeur pour que les plus petits puissent se loger dans les intervalles des grands?

Le même tube qui avait servi pour la série expérimentale VIII fut aussi employé dans la recherche suivante. On avait:

Poids du tube + sable + eau . . . . . = 279,08 grammes.
„ du sable contenu dans le tube . . . = 103,39 „
„ du tube . . . . . = 152,97 „
„ de l'eau dans les interstices du sable = 22,72 „
„ du tube rempli d'eau seule, à 10,°4 C. = 214,33 „

On déduit de là:

Eau déplacée par le sable = 214,93 — 152,97 — 22,73 = 39,23,

poids spécifique du sable $= \frac{103,39}{39,23} = 2,635$,

volume de sable dans le tube $= \frac{103,39}{2,635} = 39,23$,

rapport entre le volume du sable et l'eau renfermée dans ses interstices

$$= \frac{39,23}{22,72} = \frac{1,72}{1}.$$

Ainsi que la remarque en a déjà été faite à plusieurs reprises, ces chiffres étaient constants pour toutes les sortes de sables, à grains d'égale grosseur.

Les volumes des grains des quatre sortes de sable sont:

N°. 1.	N°. 2.	N°. 3.	N°. 4.
$\frac{0,0004288}{2,63} =$	$\frac{0,0001525}{2,63} =$	$\frac{0,00001646}{2,63} =$	$\frac{0,00000586}{2,63} =$
0,0001630	0,0000579	0,00000625	0,00000222

Un mélange à parties égales fut maintenant fait entre les sables N°. 1 et N°. 2, et un autre, aussi à parties égales, entre le N°. 3 et le N°. 4. Or, quand le tube avait été rempli d'un de ces mélanges, par le procédé connu, il présentait un poids de 279 grammes, c'est-à-dire le même que lorsqu'il était chargé d'un sable homogène. Quand, au contraire, le tube contenait un mélange de N°. 1 et N°. 3, de N°. 2 et N°. 3 etc., le poids était plus grand. Les sortes N°. 1 et N°. 2, et les sortes N°. 3 et N°. 4 ont donc la propriété que les grains du N°. 2 ne peuvent pas se loger dans les interstices du N°. 1, ni les grains du N°. 4 dans les interstices du N°. 3, sans changer la position de ces grains plus gros; tandis que cela est possible, au contraire, quand les numéros sont mélangés d'une autre manière. Un petit grain de sable se comporte, par rapport à un interstice dans lequel il est placé, à peu près comme une petite sphère inscrite entre quatre sphères plus grandes, qui auraient pour centres les quatre angles d'un tétraèdre, et pour rayons les demi-côtés de ce tétraèdre: le grain ne remplit l'interstice qu'en partie.

Comme les deux mélanges N°. 1 avec N°. 2 et N°. 3 avec N°. 4 remplissaient la condition de la question ci-dessus posée, c'est avec eux qu'on expérimenta. Voici les résultats qui furent obtenus:

Mélange de parties égales de N°. 1 et de N°. 2.

Temps.	Température réduite à	Quantité d'eau écoulée.
5 min.	12° C.	44,5 cc.
		44,1 „
		44,0 „
		45,0 „
		44,5 „
		44,5 „
		44,0 „
		44,5 „
15 min.		moyenne 132,9 „

Mélange de parties égales de N°. 3 et de N°. 4.

Temps.	Température réduite à	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	14,5 cc.
		15,0 „
		15,5 „
		15,0 „
		14,7 „
		15,0 „
		15,5 „
		15,0 „
		moyenne 15,0 cc.

Les quantités d'eau écoulée sont:

pour N°. 1. . . . . 180,9 cc.
„ „ 2. . . . . 89,7 „
moyenne . . . . . 135,3 „
trouvé . . . . . 132,9 „

Ces mêmes quantités sont:

pour N°. 3. . . . . 21,02 cc.
„ „ 4. . . . . 10,3 „
moyenne . . . . . 15,66 „
trouvé . . . . . 15,0 „

On voit que la quantité d'eau transmise par un mélange sableux est approximativement égale à la moyenne des quantités transmises par chacune des sortes de sable dont le mélange est composé, ou, ce qui revient au même, qu'un mélange de deux ou plusieurs sortes de sable, répondant à la condition énoncée, se comporte comme un sable homogène d'une grosseur de grain moyenne entre celles de ses éléments constituants.

Nous arrivons maintenant à la dernière question concernant le sable.

X.

Comment l'écoulement se fait-il à travers des mélanges sableux dont les grains diffèrent assez en grandeur pour que les petits puissent se placer dans les intervalles des grands?

Deux mélanges ont été étudiés, dans le même tube que ci-dessus.

A. N°. 1 avec N°. 4, dans le rapport de 1 à 1.
B. N°. 1 avec N°. 2, N°. 3 et N°. 4, dans le rapport 1 : 1 : 1 : 1.

A. N°. 1 et N°. 4, 1 : 1.

$h = \frac{1}{2}$ mètre.

poids du tube + sable + eau	286,5	grammes.
„ „ tube	152,97	„
„ „ sable + eau	133,53	„
„ „ sable seul	115,6	„
„ de l'eau dans les interstices de sable	17,93	„

L'expérience a donné:

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	13,5 cc.
		13,3 „
		13,4 „
		13,5 „
		13,3 „
		13,5 „
		moyenne 13,4 cc.

B. N°. 1, N°. 2, N°. 3, N°. 4. 1 : 1 : 1.

$h = \frac{1}{2}$ mètre.

poids du tube + sable + eau . . . . . 285 grammes.
„ „ sable contenu dans le tube . . . . . 111,9 „
„ de l'eau contenue dans le tube . . . . . 20,13 „

Temps.	Température.	Quantité d'eau écoulée.
15 min.	12° C.	18,5 cc.
		18 „
		19 „
		18,5 „
		18,5 „
		18,5 „
		moyenne 18,5 cc.

En considérant d'abord la série A, nous voyons que la quantité d'eau écoulée est 13,4 cc., et reste par conséquent beaucoup au-dessous de la moyenne = 95,6 cc. des quantités fournies séparément par les deux éléments du mélange, tandis qu'elle ne s'éloigne pas beaucoup de la quantité = 10,3 que laisse passer le sable fin seul. C'est là l'effet de la présence des grains de sable fin dans les interstices du sable grossier.

La quantité d'eau dépend, comme l'indique notre loi, de deux grandeurs: D^2 et r^2. La proportionnalité à D^2 n'est vraie, toutefois, que si le rapport entre le volume occupé par les grains de sable et le volume occupé par les interstices est constant. Pour le sable homogène, et pour les mélanges tels que ceux dont il a été question au paragraphe IX, ce rapport était $\frac{39,23}{22,72} = \frac{1,72}{1}$. Ici, il est modifié et s'élève à $\frac{115,6}{2,63 \,.\, 17,93} = \frac{2,45}{1}$.

La proportionnalité à r^2, c'est-à-dire à la section du grain isolé, est également altérée, attendu que cette proportionnalité n'existe non plus que dans le cas où le rapport reste constant entre les grains et les interstices.

Le changement de grandeur des interstices séparés n'est toutefois pas proportionnel au changement de la somme des interstices, car le nombre des interstices a également varié.

Dans la séconde série d'expériences, B, nous avons opéré sur un mélange, à parties égales, de quatre sortes de sable. Mais, puisque N°. 1 et N°. 2 se comportent ensemble comme un des mélanges dont il a été question au paragraphe IX, et que N°. 3 et N°. 4 se comportent aussi comme un mélange à grain moyens, le mélange B se réduit en définitive à un mélange analogue à A. La quantité d'eau écoulée est 18,5 cc., la moyennne des quantités données par les 4 éléments constituants est 75,48 cc., la moyenne des quantités fournies par N°. 3 et N°. 4 est 15,66. Nous voyons donc de nouveau que l'écoulement se règle de préférence d'après le sable fin N°. 3 et N°. 4, mais qu'ici encore il dépasse la moyenne, tout comme c'était le cas dans la série A.

On se rapprochera sans doute le plus de la vérité en introduisant ici un coefficient empirique. Dans les deux séries d'expériences, la quantité d'eau écoulée est environ 1,2 fois celle qu'on obtient lorsque le sable fin, qui peut pénétrer dans les interstices du sable grossier, est employé seul. On regardera donc de pareils mélanges comme formés uniquement de ce sable fin, et on multipliera par 1,2 la quantité d'eau écoulée qui se déduit de cette supposition.

Le coefficient 1,2 exprime donc ici l'influence du contact. Dans les expériences de la série IV, où cette influence n'agissait que dans une seule couche du sable, celle qui touchait à la paroi du tube, elle n'était pas sensible; mais dans les mélanges tels que ceux dont nous traitons maintenant, où cette influence s'exerce à la surface de chacun des gros grains, elle se fait sentir dans la mesure trouvée.

Je ferai encore observer que, si le mélange ne contient que très peu du sable fin susceptible de se loger dans les interstices du sable grossier, en sorte qu'une partie de ces interstices restent entièrement vides, la perméabilité obéit à la règle donnée au paragraphe IX.

Lorsque le sable renferme de l'air, cet air n'est pas expulsé par l'eau, mais forme des bulles qui adhèrent aux grains de sable et se comportent comme des grains de sable fin logés dans les interstices.

Tous les résultats que nous avons trouvés pour la perméabilité du sable se laissent résumer dans la formule suivante:

$$Q = 0{,}4257\ \mathrm{m}^3 . \frac{h\,D^2\,r^2}{L}\,(1 + 0{,}0136\,t + 0{,}000704\,t^2),$$

où r est exprimé en 10ièmes de millim., h, D et L en mètres.

Il faut seulement ne pas perdre de vue que, pour des couches verticales, on doit remplacer h par $h + L$, et, pour des couches dont la surface ne supporte pas le poids d'une colonue d'eau, mettre $L - \frac{28{,}92}{r}$ millim. au lieu de h. (v. II).

En outre, quand il s'agit de mélanges dont les interstices sont occupés, il faut prendre pour r le rayon du sable fin contenu dans le mélange, qui se comporte comme un sable homogène, et multiplier Q par 1,2.

En ce qui concerne l'argile, avant de passer à la solution expérimentale des questions que nous nous sommes posées plus haut, nous noterons quelques-unes de ses propriétés générales.

En premier lieu, le dépôt de l'argile pure dans l'eau est tout à fait indépendant de la pression. C'est ce qui résulte de l'expérience suivante. Dans l'une des branches d'un long tube en U, large de 1cm,15, dont la partie courbe était remplie de mercure, j'introduisis une bouillie liquide formée de 5 grammes d'argile et de 25 grammes d'eau, puis le tube fut abandonné à lui-même dans une position verticale. L'argile se déposa lentement. Au bout d'environ six semaines le tassement ne faisait plus de progrès sensibles, et après que la hauteur de la colonne d'argile fut restée constante durant quinze jours, la branche où elle se trouvait fut fermée au moyen d'un bouchon et celui-ci placé sous un point d'appui fixe, de manière à ne pouvoir être chassé du

tube par une forte pression. On versa ensuite du mercure dans la branche vide du tube en U, et on surmonta cette branche d'un long tube droit, qui fut également rempli de mercure. L'eau qui recouvrait l'argile supportait alors la pression d'une colonne de mercure de $2^{m},3$ de hauteur. Or, au bout d'une semaine, on constata que la colonne d'argile n'avait subi aucune diminution de hauteur, pas même d'une fraction appréciable de millimètre. Cette colonne avait une hauteur de $10^{cm},6 = 11^{cc},0$ en volume. La boue argileuse était donc composée de 5 grammes $= 2^{cc},272$ d'argile et de $8^{cc},728$ d'eau. Une détermination directe de la quantité d'eau dans la partie inférieure de la couche d'argile montra que cette partie contenait pour 1 volume d'argile 1,78 vol. d'eau. Ce résultat prouve que le dépôt se fait par couches, et de façon que la couche inférieure soit plus dense que les suivantes; ainsi, tandis que la pression de l'eau dans laquelle le dépôt s'opère n'a sur lui aucune influence, les particules argileuses exercent au contraire les unes sur les autres une pression en vertu de laquelle la couche augmente de densité de haut en bas, quand l'argile se dépose dans l'eau par l'effet de sa propre pesanteur.

Une autre propriété de l'argile pure est celle-ci. Lorsque l'argile est pétrie avec très peu d'eau en une pâte plastique, et que celle-ci est battue fortement dans le tube servant aux expériences, des couches mêmes très minces de semblables mélanges sont tout à fait imperméables à l'eau sous une pression modérée. Les expériences suivantes prouvent cette assertion:

Dans l'appareil qui sera décrit ci-dessous, on introduisit une couche de 1 cm. d'épaisseur d'un mélange de 4 parties (en poids) d'argile et de 1 partie d'eau, laquelle couche fut exposée à la pression d'une colonne d'eau de $1^{m},5$; au bout de 24 heures, pas une trace d'eau n'avait traversé la couche d'argile. Un mélange de 3 parties d'argile et 1 partie d'eau se comportait de la même manière, même quand l'épaisseur de la couche d'argile était réduite à $1^{mm},5$. Sous une pression élevée, toutefois, ces mélanges deviennent perméables, ainsi qu'on le verra plus loin. D'un autre côté, les mélanges qui renferment plus de

1 partie d'eau sur 3 parties d'argile laissent aussi passer l'eau sous une pression faible.

Une conséquence de cette propriété, c'est que pour l'étude des lois de la perméabilité de l'argile on ne pouvait opérer que sur des colonnes très basses, si l'on voulait que les quantités d'eau transmise fussent encore mesurables; en outre, la précision des mesures devait être au moins dix fois plus grande que cela n'avait été nécessaire dans les déterminations faites sur le sable.

Une troisième propriété de l'argile est la suivante: Si l'on fait des mélanges d'argile et d'eau en proportions différentes, et qu'on les laisse traverser par l'eau sous différentes pressions, on trouve qu'après l'expérience chacun des mélanges a la même composition qu'au début.

Un mélange qui sur $7^{gr},4$ d'eau contenait $6^{gr},3$ d'argile fut soumis à l'action de l'eau sous une pression de $1^{m},5$. Après qu'il en eut été traversé durant une semaine, on prit au centre de la colonne un échantillon du mélange, qu'on pesa et dans lequel on dosa l'eau. Ce dosage donna 0,73 d'eau pour 0,63 d'argile. Un autre mélange, traité de la même manière, contenait avant l'opération 5 grammes d'argile et $2^{gr},9$ d'eau, après, $0^{gr},879$ d'argile et $0^{gr},503$ d'eau, proportion qui est la même que la première.

C'est seulement après avoir constaté cette propriété qu'on pouvait aborder la recherche de la perméabilité de l'argile, puisque, si la proportion d'eau du mélange avait continuellement varié durant l'expérience, on n'aurait pu s'attendre à un écoulement constant.

Cette propriété tient à ce qu'une pâte argileuse peut recevoir des formes différentes sans que son volume subisse de changement, c'est-à-dire qu'elle n'offre pas la moindre trace d'élasticité, caractère qu'on désigne sous le nom de plasticité.

Dans des mélanges d'argile pure et d'eau il se forme des fissures, tant par la dessiccation que sous influence des vibrations accidentelles. Lorsque les mélanges soumis à l'expérience se fissuraient par l'effet de cette dernière cause, ce qui arriva plus d'une fois,

surtout quand on opérait sous de fortes pressions, la perméabilité montrait toujours un accroissement anormal; dans ce cas, les résultats obtenus devaient être rejetés.

Décrivons maintenant le mode d'expérimentation employé pour l'argile.

Le tube à pression est le même que pour le sable. Les tubes à expérience sont deux cylindres en verre de diamètre égal, les mêmes dans toutes les expériences, bien dressés à l'émeri aux deux côtés, l'un à une hauteur de 1 cm., l'autre à une hauteur de 0cm,5. La boîte de fermeture est un cylindre en cuivre, ayant un diamètre trois fois aussi grand que celui des tubes de verre. A l'intérieur de ce cylindre en cuivre est soudée une plaque métallique rigide criblée de trous, qui le partage en deux moitiés cylindriques, d'égale hauteur. Sur l'une des faces de la plaque métallique on applique deux disques de papier à filtre suédois, de même diamètre que la plaque, préalablement bien collés l'un à l'autre par les bords au moyen d'un mélange de résine et de cire. Le bord de ce double disque de papier est ensuite fixé hermétiquement, à l'aide du même mélange, sur la plaque métallique, puis le papier est recouvert, pour le protéger, d'une seconde plaque métallique perforée, très mince.

Comme opération préliminaire, on remplit la boîte d'une bouillie d'argile, et on y enfonce, jusque sur la plaque métallique, un bouchon de caoutchouc, dans lequel est fixé le tube à expérience; une mince couche d'argile reste alors attachée à la face inférieure du bouchon, le reste monte dans le tube de verre. A l'aide d'un ciseau tranchant on enlève l'argile surabondante au bord supérieur de ce tube, puis on soumet la couche d'argile à l'action du courant d'eau.

Cette opération préliminaire a pour but de remplir d'argile les pores du papier et les trous de la plaque métallique supérieure, afin qu'il n'y ait pas de perte, de ce chef, lors de l'expérience proprement dite. Quand les pores sont remplis et qu'on vide le tube à expérience, la boîte laisse passer beaucoup plus d'eau

que la colonne d'argile; elle ne met donc aucun obstacle à l'écoulement dû à la perméabilité, tandis que le papier à filtre empêche que la moindre trace d'argile ne s'échappe. Dans la moitié inférieure de la boîte est fixé le tube abducteur, qui a la même forme que précédemment et aboutit directement à la paroi du cylindre jaugeur, sans l'intermédiaire de l'entonnoir employé dans les expériences sur le sable. Avec cette disposition, l'écoulement se fait d'une manière continue, jamais goutte à goutte.

Le cylindre jaugeur est une burette de précision, divisée en 10ièmes de centimètre cube, et dans laquelle les fractions de division se laissent encore très bien évaluer. La pression est mesurée à partir du point où l'eau quitte le tube abducteur.

L'appareil étant préparé avec soin, on peut procéder aux déterminations.

L'argile, introduite dans un creuset de platine, où se trouve un petit agitateur, est pesée sur une balance délicate, mêlée intimement avec de l'eau, chauffée quelque temps au bain-marie et mélangée encore une fois aussi parfaitement que possible; après quoi on y dose l'eau par la pesée. La boîte est ensuite remplie à demi avec cette argile, dont on enduit aussi le dessous du bouchon de caoutchouc, de manière qu'aucune bulle d'air ne reste dans le mélange; le bouchon, muni du tube à expérience, est alors enfoncé dans la boîte, on donne à celle-ci quelques coups secs sur un corps dur, et on racle la portion du mélange qui dépasse le bord du tube. Une précaution qui a encore été employée, c'est de poser sur la plaque métallique, sous le tube à expérience, un triangle en fil de platine très mince. Ce triangle n'augmente pas d'une manière appréciable la hauteur de la colonne d'argile, tandis qu'il donne la garantie que le tube à expérience ne touche pas la plaque métallique, et qu'ainsi l'eau sortant de la colonne d'argile peut se répandre sur toute l'étendue du filtre. Finalement, après avoir, par aspiration, rempli d'eau le tube abducteur, afin que des bulles d'air ne puissent adhérer sous le crible dans la boîte, on unit l'appareil au tube à pression. Le tube à expérience n'est pas fixé directement au

tube à pression, mais relié à lui au moyen d'un tube de caoutchouc vulcanisé (voir fig. 5).

Les vibrations éprouvées par l'appareil occasionnent de petits écarts dans les résultats de l'expérience; ces vibrations doivent donc être évitées autant que possible.

XI.

Comment la perméabilité de l'argile dépend-elle de la hauteur de la colonne d'eau?

Un mélange de 5 grammes d'argile et de 3gr,286 d'eau a été étudié de la manière qui vient d'être exposée. Voici les résultats obtenus :

$h = 1^{m},5$.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,60 cc.
		0,59 „
		0,59 „
		0,60 „
		0,59 „
		0,58 „
		0,58 „
		0,58 „
	moyenne	0,59 cc.

$h = 1$ mètre.

Temps.	Température.	Quantité d'éau.
1 heure.	12° C.	0,39 cc.
		0,39 „
		0,39 „
		0,40 „
		0,39 „
		0,39 „
		0,38 „
		0,38 „
	moyenne	0,39 cc.

Il ressort de ces nombres que les quantités d'eau sont entre elles comme les pressions, c'est-à-dire, comme 3 : 2, ce que nous exprimons par la formule:

$$Q = (k)\, h.$$

XII.

Comment la perméabilité dépend-elle de l'épaisseur de la couche d'argile.

Le mélange était composé de 5 grammes d'argile et de $3^{gr},75$ d'eau. L'expérience a donné les résultats suivants.

$h = 1^{m},5$, épaisseur de la couche d'argile $L = 1^{cm},0$.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,72 cc.
		0,72 „
		0,71 „
		0,71 „
		0,71 „
		0,70 „
		0,70 „
		0,70 „
		moyenne 0,71 cc.

$h = 1^{m},5$ $L = 1^{cm},5$.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,47 cc.
		0,47 „
		0,47 „
		0,46 „
		0,46 „
		0,47 „
		0,45 „
		0,46 „
		moyenne 0,46 cc.

On voit par ces chiffres que les quantités d'eau sont en raison inverse des épaisseurs des couches d'argile, soit comme 3 : 2, ce qui s'exprime par la formule:

$$Q = \frac{(k)}{L}.$$

XIII.

Comment la perméabilité de l'argile dépend-elle de la température?

L'argile fut amenée à l'état d'une bouillie épaisse, puis introduite dans l'appareil. L'écoulement se ralentit peu à peu et devint constant au bout de quelques semaines. Après qu'il fut resté invariable pendant huit jours, à une température qui ne changeait pas non plus, les déterminations eurent lieu de la manière indiquée au paragraphe V.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	5°,8 C.	0,75 cc.
	8 ,8 „	0,83 „
	12 ,0 „	0,90 „
	13 ,5 „	0,95 „
	14 ,9 „	1,00 „
	16 ,7 „	1,10 „
	18 ,7 „	1,20 „

Traités par la méthode des moindres carrés, ces chiffres donnent les coefficients

$$\alpha = 0{,}7142$$
$$\beta = -\,0{,}0016$$
$$\gamma = 0{,}001456.$$

La relation entre la perméabilité et la température peut donc être représentée par la formule

$$Q = 0{,}714\,(1 - 0{,}00224\,t + 0{,}002038\,t^2).$$

XIV.

Comment la perméabilité dépend-elle de la quantité d'eau associée à l'argile?

Ce problème présente un tout autre caractère que la question analogue relative au sable.

Tandis que pour le sable la perméabilité dépend de la grosseur du grain, lequel doit sa finesse plns ou moins grande à des actions mécaniques de désagrégation et d'usure, l'argile est un produit de décomposition chimique et consiste en un assemblage de molécules simples ou réunies en groupes. Elle forme une matière homogène, fine, impalpable, et dans un mélange uniforme d'argile et d'eau on doit regarder comme partout égale tant la grandeur moyenne des molécules d'argile, que la grandeur moyenne des interstices remplis d'eau. Il résulte de là que, toutes choses égales d'ailleurs, l'espace disponible pour le courant qui traverse le mélange ne doit dépendre que de la quantité d'eau mêlée à l'argile, tandis que le nombre des interstices capillaires existant dans une section verticale doit dépendre uniquement de la quantité d'argile que contient le mélange. Les deux quantités, celle de l'argile et celle de l'eau, sont donc indépendantes l'une de l'autre et peuvent varier arbitrairement, tandis que les quantités de sable et d'eau restent dans un rapport constant.

Après ces observations préliminaires, passons aux expériences.

Deux séries expérimentales, communiquées aux paragraphes XI et XII et que nous désignerons comme N°. 3 et N°. 2, peuvent être utilisées ici sans modification. A ces séries, il en a encore été ajouté une autre, N°. 1, qui a fourni les nombres suivants :

N°. 1.

5 grammes d'argile; $4^{gr},375$ d'eau; $h = 1^{m},5$; $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau
1 heure.	12° C.	0,86 cc.
"	"	0,80 "
"	"	0,89 "
"	"	0,87 "
"	"	0,79 "
"	"	0,90 "
"	"	0,80 "
"	"	0,85 "
		moyenne 0,84 cc.

Les résultats moyens des trois séries donnent le tableau suivant :

$$h = 1^{m},5\,,\ L = 1 \text{ cm.}$$

No.	Quantité d'argile et d'eau. argile.	eau.	Perméabilité.
1	5 gr.	4,375	0,84 cc.
2	5 „	3,750	0,71 „
3	5 „	3,286	0,59 „

On voit immédiatement que la perméabilité diminue avec la proportion d'eau du mélange argileux, quand les quantités d'argile sont égales. Il faut remarquer, toutefois, que ces quantités ne sont pas égales dans le tube à expérience, attendu que le même tube était employé pour toutes les déterminations, de sorte que la quantité d'argile augmentait dans le tube à mesure que la proportion d'eau décroissait. La perméabilité diminue aussi dans une progression notablement plus rapide que la proportion d'eau du mélange.

Sur une section horizontale, les quantités d'argile et d'eau, les premières supposées égales, sont entre elles comme les volumes, puisque les hauteurs sont les mêmes; or, en divisant par la densité (= 2,22 pour l'argile), on obtient :

	Vol. de l'argile.	Vol. de l'eau.
N°. 1.	2,272	4,375
„ 2.	2,272	3,750
„ 3.	2,272	3,286.

A hauteur égale, les sections devraient donc être entre elles comme les sommes du volume de l'argile et de l'eau, c'est-à-dire, pour les rapports actuels :

argile + eau = d^2	
N°. 1	6,647
„ 2	6,022
„ 3	5,558.

Ces derniers chiffres représentent le cas où, sur la section, les quantités d'argile sont les mêmes, les quantités d'eau diffé-

rentes; en d'autres termes, comme nous l'avons vu plus haut, le cas où le nombre des interstices capillaires est le même, le rayon de ces interstices différent.

Si l'on prend maintenant les carrés des volumes d'eau, ces carrés expriment en même temps le rapport des quatrièmes puissances des rayons des tubes capillaires, tant pour la somme des interstices capillaires que pour les interstices considérés isolément, puisque le nombre en est le même, à cause de la constance de la proportion d'argile. On trouve ainsi:

	r^4 ou (vol. d'eau)^2
N°. 1	19,140
„ 2	14,062
„ 3	10,797.

Ces chiffres se rapportent à des sections inégales; en les réduisant finalement à des sections égales, c'est-à-dire, en les divisant par les sommes des volumes, on obtient:

$$\frac{(\text{Vol. eau dans le mélange})^2}{\text{Vol. argile} + \text{eau dans le mélange}} = \frac{r^4}{d^2}$$

N°. 1	2,879
„ 2	2,329
„ 3	1,942.

Si nous rapprochons ces nombres des quantités d'eau écoulée:

N°. 1	0,84
„ 2	0,71
„ 3	0,59,

la comparaison nous donne, pour le rapport des quantités trouvées directement et des quantités calculées, les chiffres suivants:

	trouvé.	calculé.
N°. 1	2,75	2,87
„ 2	2,32	2,32
„ 3	1,93	1,93

qui s'accordent très bien entre eux.

Nous pouvons exprimer cette loi par la formule:

$$Q = (K) \frac{r^4}{d^2}.$$

Comme le calcul a été fait dans la supposition que l'écoulement est aussi proportionnel à la section du tube, l'accord de ce calcul avec l'expérience prouve en même temps la loi

$$Q = (K) D^2,$$

et nous avons par conséquent la formule

$$Q = (K) D^2 \frac{r^4}{d^2},$$

où D^2 représente la section horizontale du tube, r le rayon de la section de la quantité d'eau contenue dans le mélange, et d^2 la section de la quantité argile + eau, ou encore la somme des volumes argile + eau, pour la même valeur de D^2.

La loi que nous venons de trouver est la même que celle fournie par le sable, sauf que la loi pour l'argile est plus générale. En y remplaçant d^2 par nr^2, elle reproduit en effet la loi formulée pour le sable

$$Q = (K) D^2 r^2,$$

où n est compris dans D^2. Dans le cas actuel, toutefois, r est relatif au volume d'eau dans la couche entière, ou à la section horizontale du volume total de l'eau, les orifices d'écoulement ne dépendant ici que du volume de l'eau, attendu que les particules d'argile ont une grandeur constante. Pour le sable, au contraire, r se rapporte à la section d'un grain de sable, ou d'un interstice capillaire, celui-ci étant supposé limité, section dont dépend l'orifice d'écoulement, vu que, pour le sable, c'est le volume de l'eau qui est invariable.

La loi pour le sable est donc un cas particulier de la loi pour l'argile; n, c'est-à-dire, le rapport de l'argile à l'eau, devient alors le rapport du sable à l'eau. En remettant nr^2 pour D^2, et faisant entrer n dans la constante, la formule reproduit de nouveau la loi de Poiseuille pour les tubes de verre capillaires.

L'argile nous offre donc la loi de la perméabilité sous sa forme la plus générale.

Avant de quitter ce sujet, nous avons encore un point à noter.

Ainsi qu'il a déjà été dit, les mélanges d'argile avec très peu d'eau, par exemple dans le rapport de 3 à 1, soumis à une pression de 1^m, 5 d'eau, restent pendant 24 heures entièrement imperméables; ou, si l'on prend un peu plus d'eau, par exemple un mélange de 2 : 1, la quantité d'eau transmise à cette pression est difficilement mesurable. A des pressions plus élevées, toutefois, de pareils mélanges redeviennent perméables. Pour cette raison, il a encore été institué une série d'expériences dans laquelle la pression de l'eau était renforcée par une colonne de mercure. (Dans les expériences communiquées jusqu'ici on n'avait pu appliquer une pression plus forte, parce qu'il se produisait toujours des fissures dans le mélange, lesquelles augmentaient d'une manière anormale la quantité d'eau écoulée).

La disposition de l'appareil employé pour ces expériences est facile à comprendre d'après la fig. 6.

Avec un mélange de 5 grammes d'argile et 1^{gr},505 d'eau, on a obtenu les résultats suivants:

Temps.	Température.	Pression.	Quantité d'eau.
4 heures.	12° C.	4,56 m.	0,34 cc.
"	"	" "	0,35 "
"	"	" "	0,35 "
"	"	11,5 "	0,87 "
"	"	" "	0,86 "
"	"	" "	0,87 "

L'opération terminée, le mélange contenait 1,362 d'argile et 0,412 d'eau; il avait donc la même composition qu'au début. Les résultats montrent aussi que la perméabilité est encore en rapport constant avec la pression. La quantité d'eau transmise est, toutefois, considérablement diminuée: d'après la formule ci-dessus, le mélange aurait dû laisser passer 1^{cc},27, au lieu de 0^{cc},35.

Les mélanges très pauvres en eau ne suivent donc plus la loi en question. Comme ces mélanges, pour former une pâte homogène, doivent être battus très fortement, on peut croire que les molécules d'argile y sont tellement rapprochées qu'elles mettent, en partie, un obstacle absolu au passage de l'eau. Ces molécules se trouveraient donc, en partie, dans un état anormal, et il n'y aurait pas lieu, à mon avis, d'admettre pour de pareils mélanges une autre loi de perméabilité ou une autre constante.

Comme nous le verrons plus loin, le calcaire reste fidèle à la loi entre des limites beaucoup plus larges; mais, en dehors de ces limites, il s'en écarte dans le même sens que l'argile.

Les mélanges argileux qui renferment *plus* d'eau que ceux des trois premières séries d'expériences s'écartent aussi de la loi, dans un sens opposé. La perméabilité y montre donc un accroissement anormal, parce que, dans ces mélanges à consistance plus ou moins liquide, les molécules argileuses se déplacent pendant le passage de l'eau.

XV.

Quelle est la constante du frottement pour l'argile?

Dans la formule

$$Q = (K)\frac{h}{L}D^2\frac{r^4}{d^2}(1 + 0{,}00224\,t + 0{,}002038\,t^2),$$

où l'on avait $h = 1^{m},5$, $L = 1$ cm., $D = 1^{cm},1$,

faisons $h = 1$, $L = 1$, $D = 1$, $\frac{r^4}{d^2} = 1$ et $t = 12°$ C.;

nous trouvons alors:

par N°. 1 . . . . . $K = 1{,}47$
„ „ 2 . . . . . $K = 1{,}36$
„ „ 3 . . . . . $K = 1{,}28$
moyenne . . . . . $K = 1{,}37$,

cette valeur de la constante représentant des centimètres cubes et s'appliquant entre les températures observées dans les expériences.

Pour le calcaire, la méthode d'examen a été la même que pour l'argile. Le calcaire employé, — c'était, je l'ai déjà dit, de la craie purifiée et soumise à la lévigation, — forme une poudre impalpable, composée de globules microscopiques et se comportant, sous le rapport de la perméabilité, comme un corps homogène. Il partage, à beaucoup d'égards, les propriétés de l'argile. Son dépôt dans l'eau est indépendant de la pression. Les mélanges de 5 parties de calcaire et 1 partie d'eau sont imperméables sous une pression de $1^{m},5$, et les mélanges plus riches en eau ne changent pas de composition lorsqu'ils sont traversés quelque temps par un courant d'eau. La surface seule de la colonne calcaire, surface qui est en contact avec la colonne liquide, absorbe un peu plus d'eau, ce qui était aussi le cas pour l'argile; cette absorption est toutefois sans influence appréciable, vu qu'elle reste bornée à une couche très mince. De même, il n'y a que des traces de matière soulevées à la surface du mélange par le mouvement de l'eau, lorsqu'on fait arriver celle-ci avec précaution et très lentement.

Comme le carbonate de chaux est soluble dans l'eau, bien qu'à un degré très faible, on introduisait quelques fragments de craie dans le tube à pression, de manière que l'eau, avant de passer dans le tube à expérience, eût déjà été assez longtemps en contact avec une matière calcaire pour ne plus rien dissoudre du mélange.

XVI.

Comment la perméabilité du calcaire dépend-elle de la pression? L'expérience a donné les résultats suivants:

Mélange composé de: $3^{gr},5$ de calcaire et 1 gr. d'eau.

$h = 1^{m},5$, $L = 1$ cm.

Temps	Température	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,40 cc.
"	"	0,39 "
"	"	0,39 "
"	"	0,38 "
"	"	0,39 "
"	"	0,37 "
"	"	0,38 "
"	"	0,37 "
		moyenne 0,38 cc.

$h = 1$ m. $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,25 cc.
"	"	0,25 "
"	"	0,24 "
"	"	0,24 "
"	"	0,24 "
"	"	0,23 "
"	"	0,23 "
"	"	0,23 "
		moyenne 0,24 cc.

Il ressort de ces deux séries d'expériences que le rapport des quantités d'eau écoulée présente un accord satisfaisant avec le rapport des pressions, ce qui s'exprime de nouveau par la formule

$$Q = (K)\, h,$$

où (K) désigne la constante du frottement pour le calcaire.

XVII.

Comment la perméabilité dépend-elle de la hauteur L de la colonne calcaire?

Voici la réponse fournie par l'expérience:

Mélange composé de 3 gr. de calcaire et 1 gr. d'eau.

$h = 1^{m},5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,48 cc.
"	"	0,48 "
"	"	0,49 "
"	"	0,47 "
"	"	0,48 "
"	"	0,47 "
"	"	0,47 "
"	"	0,47 F
		moyenne 0,48 cc.

$h = 1^{m},5$, $L = 1^{cm},5$.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,34 cc.
"	"	0,33 "
"	"	0,32 "
"	"	0,32 "
"	"	0,31 "
"	"	0,31 "
"	"	0,30 "
"	"	0,30 "
		moyenne 0,31 cc.

On voit par ces résultats que les quantités d'eau sont en raison inverse des hauteurs de la colonne calcaire, c'est-à-dire

$$Q = \frac{(K)}{L}.$$

XVIII.

Comment la perméabilité dépend-elle de la température?

Les déterminations suivantes ont eu lieu en même temps et de la même manière que les expériences correspondantes sur

l'argile; à cet effet, deux tubes à expérience étaient reliés au tube à pression.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	5°,8 C.	1,25 cc.
"	8 ,9 "	1,45 "
"	12 ,1 "	1,65 "
"	13 ,5 "	1,75 "
"	14 ,9 "	1,85 "
"	16 ,7 "	1,95 "
"	18 ,7 "	2,15 "
"	19 ,5 "	2,3 "

On déduit de là, par la méthode des moindres carrés:

$$Q = 0{,}781\,(1 + 0{,}093\,t + 0{,}00005\,t^2).$$

XIX.

Comment la perméabilité dépend-elle de la quantité d'eau mêlée au calcaire?

Cette question a été résolue par les six séries d'expériences suivantes, dont deux ont déjà été communiquées aux paragraphes XVI et XVII.

N°. 1.

5 gr. de calcaire 2gr,5 d'eau.

$h = 1^m{,}5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,79 cc.
"	"	0,80 "
"	"	0,80 "
"	"	0,82 "
"	"	0,83 "
"	"	0,83 "
"	"	0,85 "
"	"	0,85 "
		moyenne 0,82 cc.

N°. 2.

5 gr. de calcaire, 2 gr. d'eau.

$h = 1^m,5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,62 cc.
"	"	0,62 "
"	"	0,63 "
"	"	0,62 "
"	"	0,61 "
"	"	0,63 "
"	"	0,62 "
"	"	0,60 "
	moyenne	0,62 cc.

N°. 3.

5 gr. de calcaire, $1^{gr},66$ d'eau. Voir XVII.

N°. 4.

5 gr. de calcaire, $1^{gr},43$ d'eau. Voir XVI.

N°. 5.

5 gr. de calcaire, $1^{gr},28$ d'eau.

$h = 1^m,5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,34 cc.
"	"	0,34 "
"	"	0,34 "
"	"	0,33 "
"	"	0,33 "
"	"	0,30 "
"	"	0,33 "
"	"	0,33 "
	moyenne	0,33 cc.

N°. 6.

5 gr. de calcaire, 1gr,11 d'eau.

$h = 1^m,5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,27 cc.
„	„	0,20 „
„	„	0,20 „
„	„	0,23 „
„	„	0,22 „
„	„	0,25 „
„	„	0,26 „
		moyenne 0,23 cc.

Les résultats moyens des six séries donnent le tableau suivant:

No.	Quantités de calcaire et d'eau. Calcaire.	Eau.	Eau écoulée.
1	5 gr.	2,5	0,82 cc.
2	5 „	2,0	0,62 „
3	5 „	1,66	0,48 „
4	5 „	1,43	0,38 „
5	5 „	1,28	0,33 „
6	5 „	1,11	0,23 „

Appliquons à ces nombres le même calcul que nous avons fait sur les résultats obtenus pour l'argile, c'est-à-dire, prenons les carrés $= r^4$ des volumes d'eau contenus dans les mélanges calcaires, et divisons par la somme des volumes calcaire + eau, la densité du calcaire étant supposée $= 2,6$; nous obtenons alors les rapports:

N°. 1. 1,410
„ 2. 1,019
„ 3. 0,769
„ 4. 0,609
„ 5. 0,511
„ 6. . . . . 0,406.

ou, en partant de quantités égales, les rapports:

	calculé.	trouvé.
N°. 1	0,82	0,82 cc.
„ 2	0,59	0,62 „
„ 3	0,447	0,48 „
„ 4	0,34	0,38 „
„ 5	0,297	0,33 „
„ 6	0,23	0,23 „

L'accord entre l'expérience et le calcul prouve que la perméabilité des mélanges de calcaire et d'eau suit la même loi que nous avons trouvée, au paragraphe XIV, pour l'argile, à savoir

$$Q = (K)\,\frac{r^4}{d^2},$$

où r^4 représente de nouveau le carré de la quantité d'eau contenue dans le mélange, et d^2 la somme des volumes: calcaire + eau.

XX.

Pour obtenir la constante K relative au calcaire, il faut, dans la formule

$$Q = K, \frac{h}{L}\,D^2\,\frac{r^4}{d^2}\,(1 + \alpha\,t + \beta\,t^2),$$

faire $$h = L = D = \frac{r^4}{d^2} = 1 \text{ et } t = 12^\circ;$$

on trouve alors:

par N° 1	1,90 cc.
„ „ 2	1,76 „
„ „ 3	1,66 „
„ „ 4	2,08 „
„ „ 5	2,29 „
„ „ 6	1,90 „
en moyenne $K =$	1,93 „

La constante du calcaire est donc 1,4 fois aussi grande que celle de l'argile, c'est-à-dire: à conditions égales, le calcaire laisse passer 1,4 fois autant d'eau que l'argile. Cette différence tient en premier lieu au degré de finesse des particules de l'argile et du calcaire, et en second lieu au degré de cohésion de l'eau pour ces deux substances; peut-être aussi à une différence dans le frottement, due à la forme des particules argileuses et calcaires. Les constantes empiriques représentent donc des valeurs encore très composées, au sujet desquelles on sait peu de chose jusqu'ici.

Pour le sable, la constante est $= 0,42$, quand on prend $r =$ 1/10 millim.; cela signifie que le sable, dans les conditions pour lesquelles les constantes ont été calculées, laisse traverser 3070 plus d'eau que l'argile.

Dans la nature, toutefois, le sable est ordinairement mêlé avec de l'argile ou du calcaire, ou avec tous les deux à la fois. Ce sont ces mélanges, ces matières impures, comme on les appelle communément, que nous allons maintenant considérer.

XXI.

Comment se comportent les mélanges d'argile et de calcaire.

5 gr. d'argile, $5^{gr},6$ de calcaire, $5^{gr},03$ d'eau.

$h = 1^{m},5$, $L = 1$ cm.

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure	12° C.	0,58 cc.
"	"	0,56 "
"	"	0,55 "
"	"	0,53 "
"	"	0,53 "
"	"	0,52 "
"	"	0,52 "
		moyenne 0,54 cc.

Calculée d'après la formule $Q = (K) \frac{r^4}{d^2}$, la quantité d'eau

serait 0,57. La perméabilité du mélange est donc la moyenne de celles de l'argile et du calcaire, et l'on peut se figurer *ad libitum* le partage de l'eau entre ces deux éléments constituants.

Les deux constantes doivent être prises proportionnellement aux quantités d'argile et de calcaire qui existent dans le mélange.

XXII.

Comment se comportent les mélanges de sable et d'argile?

Un mélange intime de 2gr,4795 de sable N° 4 = 0,942 vol., de 2gr,057 d'argile = 0,935 vol. et de 1gr,630 d'eau a été soumis à l'expérience. Voici les résultats obtenus:

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,82 cc.
"	"	0,81 "
"	"	0,82 "
"	"	0,80 "
"	"	0,78 "
"	"	0,77 "
"	"	0,76 "
"	"	0,76 "
		moyenne 0,79 cc.

Un mélange de 3gr,306 de sable N° 4 = 1,257 vol., de 2gr,057 d'argile = 0,935 vol. et de 1gr,630 d'eau a fourni:

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,70 cc.
"	"	0,70 "
"	"	0,70 "
"	"	0,69 "
"	"	0,68 "
"	"	0,68 "
"	"	0,67 "
"	"	0,67 "
		moyenne 0,68 cc.

Si l'on calcule les quantités d'eau par la formule $\frac{r^4}{d^2}$, et qu'on tienne compte, en outre, de ce que les grains de sable, répartis uniformément dans le mélange, sont impénétrables à l'eau, au passage de laquelle elles ferment par conséquent une portion du tube proportionnelle au volume du sable, on obtient:

Quantité d'eau:	
trouvée.	calculée.
0,79 cc.	0,76 cc.
0,68 „	0,69 „

On voit donc que la perméabilité de l'argile subit réellement une réduction proportionnelle au volume du sable, à la condition que les interstices du sable soient entièrement remplis du mélange argileux, les éléments ayant été mêlés intimement par la méthode décrite.

Si tel n'est pas le cas, les particules argileuses, poussées par l'eau qui traverse le mélange, sont incessamment déplacées dans les espaces libres, jusqu'à ce qu'elles se soient tassées de manière à former une couche dans laquelle les interstices du sable sont remplis par l'argile.

L'écoulement de l'eau ne devient alors constant qu'au bout d'un certain temps, d'autant plus court que le sable est plus fin.

On peut encore déduire de ces expériences, que le sable n'exerce sur la perméabilité aucune influence autre que celle dont il vient d'être question. Il ne se produit donc pas, aux points de contact entre l'argile et le sable, un accroissement sensible de la quantité d'eau transmise.

XXIII.

Comment se comportent les mélanges de sable et de calcaire?

Un mélange de:

4gr,000 de sable	=	1,520 vol.
2gr,600 de calcaire	=	1,000 „
1gr,307 d'eau		

a fourni:

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,47 cc.
"	"	0,46 "
"	"	0,46 "
"	"	0,44 "
"	"	0,42 "
"	"	0,40 "
"	"	0,40 "
"	"	0,45 "
		moyenne 0,43 cc.

En calculant la quantité d'eau d'après la méthode suivie pour l'argile, on obtient:

Quantité d'eau.	
trouvée.	calculée.
0,43 cc.	0,44 cc.

Les remarques faites au paragraphe précédant sont donc applicables aussi aux mélanges de sable et de calcaire.

XXIV.

Comment se comportent les mélanges de sable, de calcaire et d'argile?

Un mélange de:

2gr,8700 de sable	=	1,091 vol.
0gr,5055 d'argile	=	0,229 "
1gr,297 de calcaire	=	0,498 "

et 0,8545 d'eau a fourni:

Temps.	Température.	Quantité d'eau.
1 heure.	12° C.	0,45 cc.
"	"	0,44 "
"	"	0,45 "
"	"	0,42 "
"	"	0,40 "
"	"	0,39 "
"	"	0,39 "
"	"	0,39 "
		moyenne 0,41 cc.

tandis que la quantité calculée est 40 cc.

Les mélanges de sable, d'argile, de calcaire et d'eau obéissent donc à la même loi que les autres mélanges, ce qui est simplement une nouvelle confirmation de cette loi, attendu que le dernier résultat était déjà impliqué dans les précédents.

XXV.

Quelles conclusions générales peut-on tirer de la solution des questions étudiées?

Ces conclusions sont de deux sortes, les unes théoriques, les autres pratiques.

A. Conclusions théoriques.

1. La perméabilité pour l'eau du sable quartzeux pur est exprimée par la formule

$$Q = 0{,}4257 \,.\, \frac{h\,D^2\,r^2}{L}\,(1 + 0{,}00136\,t + 0{,}000704\,t^2),$$

où Q désigne la quantité d'eau transmise par heure, h la hauteur de la colonne d'eau qui pèse sur le sable, D^2 la section transversale de la couche de sable, r le rayon d'un grain de sable, L la hauteur de la couche traversée, t la température (voir paragraphe VII).

2. h devient égal à $h + L$ pour des couches sableuses verticales.

3. h devient égal à $L - \frac{C}{r^2} = L - \frac{28{,}9}{r^2}$ quand la colonne d'eau ne s'élève pas au-dessus de la couche sableuse traversée.

4. La vitesse d'écoulement s'obtient en faisant $D = 1$ dans la formule.

5. r doit être remplacé par $r' = \frac{r}{1{,}73}$ quand, au lieu des grains de sable, on emploie leurs interstices pour calculer Q.

6. Pour les mélanges sableux, où r a des valeurs différentes, il faut prendre la valeur moyenne quand les interstices restent vides, c'est-à-dire quand le rapport du volume du sable au volume des interstices est le même que dans un sable homogène.

7. Pour les mélanges sableux dans lesquels les interstices sont occupés, il faut prendre pour r le rayon du sable le plus fin, et multiplier Q par 1,2.

8. La perméabilité des mélanges d'argile et d'eau est exprimée par la formule:

$$Q = 0{,}0037 . \frac{h D^2 \frac{r^4}{d^2}}{L} . (1 - 0{,}00224\, t + 0{,}002038\, t^2),$$

où l'on a $r^4 = (\text{vol. eau})^2$ et $d^2 =$ vol. argile + eau. On peut aussi représenter $\frac{r^4}{d^2}$ par $\left(\frac{v}{v + v'}\right) v$, v désignant le volume d'eau et v' le volume d'argile pour la même valeur de L.

9. La perméabilité des mélanges de calcaire (craie) et d'eau est exprimée par la formule:

$$Q = 0{,}0064 \frac{h D^2 \frac{r^4}{d^2}}{L} (1 + 0{,}093\, t + 0{,}00005\, t^2),$$

où les lettres ont la même signification que ci-dessus.

10. Pour les mélanges d'argile et de calcaire, les constantes doivent être prises en proportion des volumes des deux éléments.

11. Pour les mélanges du sable avec l'argile ou le calcaire, ou avec tous les deux à la fois, on doit au lieu de D^2 mettre $D^2 - D'^2$, c'est-à-dire, la section totale de la couche doit être diminuée de la section du volume du sable contenu dans le mélange.

12. Les lois de la perméabilité du sable, de l'argile et du calcaire peuvent être exprimées, en termes ordinaires, de la manière suivante: Toutes choses égales d'ailleurs, la perméabilité, pour chacune de ces matières, est proportionelle: 1° à la somme des sections transversales des interstices par lesquels l'eau peut pénétrer; 2° à la section transversale de ces pores ou interstices capillaires, pris isolément. Cette définition implique l'existence d'une constante particulière pour chaque matière.

13. Le fait que la perméabilité est proportionnelle à la section

horizontale des pores considérés isolément s'explique par l'action de la pesanteur combinée avec celle de la cohésion.

14. Il est très probable que les lois précédentes subsistent, entre certaines limites, pour la perméabilité de toutes les matières poreuses, tant qu'aucune autre force n'intervient dans le phénomène.

B. Conclusions pratiques.

15. Les résultats énumérés en A entrent aussi en considération pour la pratique, et pour celle-ci, de plus, la règle suivante a une importance capitale. Quand on veut connaître la quantité d'eau qu'un terrain laisse passer dans des circonstances données, on n'a à tenir compte que de la couche la plus dense, c'est-à-dire de celle qui renferme les pores les plus fins; quelle que soit d'ailleurs la position de cette couche dans le sol en question, la perméabilité se règle toujours d'après elle seule, et les autres couches peuvent être regardées comme n'existant pas.

Il faut alors déterminer avec soin l'épaisseur et la composition de cette couche, puis calculer la perméabilité à l'aide de ces données, conformément aux règles prescrites. Le but sera ainsi mieux atteint que si l'on mesurait la perméabilité par une expérience directe, attendu que, dans une expérience, les éléments s'arrangent souvent autrement qu'ils ne l'étaient dans le gîte naturel. Dans certains cas, toutefois, la recherche directe de la perméabilité peut aussi avoir son utilité.

Il est à peine besoin de dire que la force motrice est toujours la pression de la colonne d'eau, quelle que soit la direction dans laquelle l'eau coule. Une pression latérale se détermine suivant les lois hydrostatiques connues. Quand on veut savoir, par exemple, combien d'eau pénètre dans un polder par-dessous une digue imperméable, à travers une couche sableuse perméable et limitée, dans laquelle l'eau doit par conséquent couler horizontalement sur un certain espace, il faut assimiler la couche sableuse à un tube en U ayant pour section, D^2, l'aire totale du polder. La longueur L peut être prise du centre de gravité de la surface du polder jusqu'au point où l'eau pénètre.

16. Les expériences en grand ne donnent pas la mesure de la perméabilité, quand on ne connaît pas exactement la composition et la nature du sol, parce que c'est de cette nature que tout dépend. La couche de sable la plus épaisse laisse passer des centaines de fois plus d'eau qu'un terrain renfermant une couche d'argile, celle-ci n'eût-elle qu'un centimètre d'épaisseur.

Dans les expériences en grand, quand même on n'aurait pas à se préoccuper des frais, il serait impossible d'observer, aussi exactement que lorsqu'on opère en petit, les conditions dont dépend la perméabilité; d'un autre côté, il n'y a pas de raison pour que les résultats d'expériences convenablement exécutées à une petite échelle ne soient pas applicables à de grandes masses.

17. Dans l'établissement d'ouvrages nouveaux, on est maître de régler à volonté la pénétration de l'eau, ou de l'empêcher tout-à-fait. Veut-on, par exemple, rendre une digue complétement imperméable, il suffit d'y introduire une mince couche d'argile grasse, de composition connue, protégée contre les ruptures par d'épaisses couches de sable. Si la digue doit reposer sur des couches sableuses perméables, il sera nécessaire de continuer la couche d'argile jusqu'à une certaine profondeur, qui dépendra de la nature des couches sableuses. Les dépôts alluviens, qui dans notre pays forment en beaucoup d'endroits la surface du sol, sur une profondeur moyenne de 8 mètres, contiennent très souvent des couches d'argile propre à l'usage dont il s'agit, ou pouvant aisément y être rendue propre.

De même on pourra donner aux polders, là où ils ne l'ont pas naturellement, le degré voulu de perméabilité, en les recouvrant d'une couche de terre alluviale plus ou moins riche en argile et en calcaire. Même le sable diluvien et le sable de mer contiennent quelquefois des quantités si notables de calcaire [1]) qu'ils ne sont que faiblement perméables à l'eau.

Dans chaque cas donné, ce n'est qu'après un examen spécial de la nature du terrain qu'on pourra décider ce qu'il y a à faire pour obtenir un résultat déterminé. En procédant ainsi, on

[1]) Voir: F. Seelheim, *De Putboringen in Zeeland.*

réussira souvent, par quelques mesures de précaution, à prévenir des désastres qui ne seraient peut-être que très difficilement réparables.

La composition des dépôts alluviens qu'on rencontre dans la nature est variée à l'infini, tandis que les recherches ici communiquées ne portent que sur les trois éléments constituants: sable, argile et calcaire. Ceux-ci sont toutefois, dans le sol néerlandais, les éléments fondamentaux. Les autres ne sont que des principes accidentels pour lesquels on ne peut donner de règles générales; rarement ils se rencontrent en assez grande quantité dans le sol pour avoir une influence prépondérante; ils n'ont donc, en somme, qu'une importance très secondaire.

Mes recherches ont d'ailleurs embrassé, pour les trois matières susdites, tous les cas dont l'existence pouvait être regardée comme possible dans la nature. A l'aide des lois trouvées, la perméabilité pourra donc toujours être déterminée approximativement.

Bien que je ne me dissimule pas les défauts inhérents à mon travail, je dois pourtant faire remarquer que le sujet lui-même, par ses difficultés spéciales, impose beaucoup de restrictions et donne lieu à de nombreuses sources d'erreur. Il était donc nécessaire de suivre la méthode et de se maintenir entre les limites qui paraissaient les plus propres à faire éviter les erreurs dont il s'agit.

En exprimant l'espoir que ces recherches auront jeté un peu de jour sur une question obscure, je me permets d'ajouter qu'elles apportent une nouvelle confirmation à cette vérité, que les lois naturelles sont toujours simples, les phénomènes seuls présentant une complication infinie.

Utrecht, 1 mai 1879.

DÉTERMINATIONS THERMOMÉTRIQUES

FAITES DANS UN PUITS DE 369 MÈTRES DE PROFONDEUR, à UTRECHT;

communiquées à l'Académie des Sciences d'Amsterdam,

PAR

P. HARTING.

A différentes reprises déjà [1]), j'ai appelé l'attention de l'Académie sur les résultats, importants au point de vue de la géologie de notre pays, fournis par plusieurs forages profonds exécutés dans les dernières années à Utrecht. Je compte revenir plus tard avec un peu plus de détails sur ce sujet, et donner alors en même temps la description des couches plus profondes, qui ont été traversées depuis ma communication la plus récente, jusqu'au niveau de $369^{m},5$ au-dessous de la surface du sol. Arrivé à cette profondeur considérable, le travail dut être arrêté par suite de la rupture de la sonde, et lorsque, après beaucoup de peines, celle-ci eut été retirée du trou de forage, on reconnut que le tuyau de

---

[1]) *Een woord over eenige putboringen te Utrecht*, dans: *Versl. en Meded.* 1872, 2e Série, t. VI.

De bodem van het Eemdal, dans: *Versl. en Meded.* 1874, t. VIII. p. 182 et suiv., spécialement p. 290.

Bijdrage tot de kennis der geologische gesteldheid van den bodem onder Utrecht en van het Eemdal, dans: *Versl. en Meded.* 1875, t. IX.

L'état de ces forages a aussi été décrit itérativement par M. A. D. van Riemsdyk, dans les *Verslagen van de verrichtingen der Gezondheids-Commissie*, années 1872—1878.

revêtement en fer, large de 16 centimètres, était serré dans le trou avec tant de force que, malgré les efforts les plus énergiques et les plus prolongés, on ne réussit pas à le faire descendre plus bas.

La question se présenta alors de savoir si, au moyen d'un tuyau de revêtement un peu plus étroit, s'adaptant à l'intérieur du premier, on essayerait de pousser le forage encore plus loin. Mais une proposition, tendant à cette fin, fut rejetée par le Conseil communal.

Dans son état actuel, toutefois, le puits artésien pouvait encore servir à une importante série d'observations, savoir, à des déterminations de la chaleur terrestre à différentes profondeurs. M'étant concerté pour cet objet avec MM. F. W. C. Krecke et J. Robbers, je m'adressai à l'administration communale, la priant de nous donner l'occasion d'exécuter les recherches projetées. Cette demande fut accueillie, mais sous des conditions assez gênantes. Les habitants du Vreeburg, la place où se trouvait le puits en question, avaient présenté une requête au Conseil, dans laquelle ils demandaient avec instance qu'on enlevât au plus vite la baraque, effectivement très laide, qui entourait le point ou le forage avait eu lieu. Avant que cela pût se faire, toutefois, une pompe devait être établie au-dessus d'un second trou de sonde, qui se trouvait à peu de distance du premier. Ce second trou avait une profondeur de 170 mètres, et on se proposait d'y couper le tuyau de fer au niveau où l'on pouvait espérer, d'après les résultats obtenus dans d'autres forages antérieurs (au Neude et au Jacobi-Kerkhof), rencontrer de l'eau potable de bonne qualité. Comme ce travail devait s'exécuter à proximité immédiate de l'orifice du premier trou de sonde, l'architecte communal, M. G. Vermeys, ne put nous accorder que l'espace d'une semaine, pendant lequel la baraque et le puits seraient à notre disposition. Passé ce terme, nous devions céder la place aux ouvriers de la ville.

J'entre dans ces détails pour qu'on veuille bien excuser les incertitudes qui subsistent encore dans les résultats obtenus par

nous, incertitudes qu'auraient probablement dissipées des recherches plus prolongées.

On sait que dans les dernières années des doutes sérieux se sont élevés au sujet du rapport dans lequel croît la chaleur de l'écorce terrestre, à mesure qu'on y pénètre plus profondément [1]). Ce sont surtout les déterminations thermométriques faites par le Conseiller des mines Dunker, dans le sondage, profond de 1270 mètres, exécuté à Sperenberg, qui ont fait voir que de pareilles déterminations, si l'on veut qu'elles fassent connaître la vraie loi de l'accroissement de la température terrestre avec la profondeur, demandent des soins beaucoup plus minutieux que ceux qu'on y avait apportés jusque-là.

L'occasion d'entreprendre des déterminations analogues dans un puits ayant une profondeur qui n'avait pas encore été atteinte dans notre pays, ne devait donc pas être négligée, et nous pouvions, pour ce travail, faire notre profit de l'expérience acquise par M. Dunker. Le principal perfectionnement introduit par lui consiste à isoler la portion de la colonne aqueuse dont on veut déterminer la température, de façon que l'eau plus chaude d'en bas et l'eau plus froide d'en haut soient empêchées de monter ou de descendre et de venir se mêler avec l'eau du point où la température doit être mesurée. Ce n'est qu'en observant cette précaution qu'on peut espérer apprendre à connaître la température réelle du sol à différentes profondeurs dans le voisinage du trou de sonde. Nous avons donc suivi l'exemple de M. Dunker, mais, au lieu des sacs d'argile et des cylindres de caoutchouc remplis d'eau, employés par lui, nous avons eu recours à une

---

[1]) Un bon résumé des observations faites en une foule de points. — à l'exception seulement de celles publiées tout récemment par M. Stapf et qui ont eu lieu dans le forage du tunnel du St. Gothard, — a été donné par M. P. Schuringa dans l'*Album der Natuur*, année 1876, p. 65. Il suffit de renvoyer à ce travail pour ce qui concerne la comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par d'autres observateurs.

autre disposition, qui atteint tout aussi bien le but, qui est plus commode dans la pratique et que nous décrirons plus bas.

Trois sortes de thermomètres ont toujours été descendus simultanément dans le trou de sonde.

1°. Le premier était un thermomètre dont le réservoir cylindrique très grand contenait environ 120 grammes de mercure, et dont le tube, deux fois recourbé à angle droit, se terminait en une pointe très déliée et ouverte. Cette pointe débouchait dans un petit godet, servant à recueillir le mercure qui sortait du thermomètre durant son séjour dans l'eau plus chaude du puits. Cette disposition revenait donc, au fond, à celle du géothermomètre de Magnus, sauf une modification, adoptée aussi par Dunker, et consistant en l'absence d'échelle fixe; après que le thermomètre avait été remonté, on trouvait la température qui régnait dans la profondeur en plaçant l'instrument, à côté d'un autre thermomètre normal, dans une cuvette pleine d'eau, qui était chauffée lentement et continuellement agitée. A l'instant où le mercure allait de nouveau déborder par la pointe, on notait la température sur le thermomètre servant à la comparaison.

En faisant usage de cette disposition, nous avons toutefois, au début, trop perdu de vue un grave défaut dont elle était affectée. Le thermomètre normal avait, en effet, une boule beaucoup plus petite que le géothermomètre. Dans ce dernier, le mercure s'échauffait donc beaucoup plus lentement que dans le premier, d'où il résultait que toutes les indications de celui-ci étaient notablement supérieures aux températures réelles, ainsi que le montra la comparaison avec les températures trouvées par une autre voie. La plupart des déterminations étaient déjà achevées, lorsque cette source d'erreur fut reconnue. C'est seulement dans les deux dernières déterminations qu'elle put encore être évitée en grande partie, ce qui eut lieu en plaçant la boule du thermomètre normal dans un petit verre cylindrique qui avait environ la même largeur que le réservoir du géothermomètre, et dans lequel on versait une quantité de mercure égale à celle que contenait ce réservoir.

2°. Une autre méthode, qui n'avait pas encore été appliquée jusqu'alors, et dont nous nous promettions des résultats beaucoup plus exacts, consistait dans l'emploi de *thermomètres à pesées*, c'est-à-dire de thermomètres faisant connaître la température par la perte de poids due à l'expulsion du mercure. La disposition (Pl. X, fig. 1) était en principe semblable à celle du géothermomètre; l'appareil se composait en effet d'un grand réservoir à mercure *ab*, de forme cylindrique, et d'un tube thermométrique deux fois recourbé à angle droit et se terminant en une pointe fine et ouverte; mais ce tube était beaucoup plus court que celui du géothermomètre. A l'un des côtés du tube est soudé un petit crochet de verre *d*, par lequel le thermomètre peut être suspendu à la balance. Vis-à-vis, tout près de la pointe ouverte, se trouve un second crochet *e*, qui doit servir à la suspension d'un petit godet de verre *f*, par l'intermédiaire d'un fil de platine *g*. Ce godet est destiné à recevoir le mercure qui est expulsé durant la pesée dans un air plus chaud.

On commença par déterminer exactement, au moyen d'une balance qui sous la charge employée accusait encore des différences de 0,1 milligramme, le poids de l'instrument en verre vide et celui du godet récepteur avec son fil de platine. Le thermomètre fut alors entièrement rempli de mercure à 0°, puis pesé avec son godet. Ensuite, le thermomètre fut suspendu, dans un appareil approprié, au milieu de la vapeur de l'eau bouillante, puis pesé de nouveau. L'immersion dans la glace, aussi bien que celle dans la vapeur de l'eau bouillante, durait au moins une heure. En comparant les résultats des deux pesées, on trouvait facilement la valeur de 1° C. exprimée en milligrammes.

Le tableau suivant fait connaître ces valeurs pour les trois thermomètres à pesées dont nous nous sommes servis et que nous désignerons par les lettres A, B et C.

		Poids en grammes du mercure à		Différence.	Valeur de 1° en milligrammes.
		0°	100°		
A	1e détermination	160,2384	157,8412	2,3972	23,972
	2e „	„	157,8249	2,4135	24,135
	3e „	160,3732	157,8337	2,3959	23,959
				Moyenne	24,022
B	1e détermination	160,3690	157,9805	2,3885	23,885
	2e „	160,3722	157,9845	2,3877	23,877
				Moyenne	23,880
C	1e détermination	136,0205	133,9803	2,0375	20,375
	2e „	136,0165	„	2,0335	20,335
				Moyenne	20,355

Ces résultats étaient assez concordants pour légitimer l'espoir que, par ce moyen, on pourrait exécuter des déterminations de température surpassant en exactitude toutes celles qu'on obtient par la lecture d'une échelle thermométrique ordinaire. A notre grand désappointement, toutefois, il se trouva que, si grande que puisse être l'exactitude théorique, celle à laquelle on atteint réellement dans l'expérience est beaucoup moindre.

La principale difficulté réside dans la grosseur à laquelle les gouttes de mercure expulsées peuvent parvenir avant de se détacher de la pointe ouverte du thermomètre. En effet, quand le thermomètre, portant une pareille goutte à son extrémité, vient à se refroidir, — ce qui arrive toujours pendant qu'on le remonte, à cause des couches d'eau de plus en plus froides qu'il doit traverser, — la goutte est de nouveau aspirée, et le poids trouvé ne donne alors plus la température vraie, mais une température trop basse. Des gouttes un peu grandes, qui se sont formées lentement, peuvent atteindre un poids de 15 milligram-

mes, ou même davantage, et la température déduite du poids du mercure est alors trop faible de 0°,7, ou de plus encore. Il est vrai qu'en donnant une petite secousse à l'appareil on peut hâter la chute des gouttes de mercure et réduire ainsi l'erreur à un minimum, comme le prouvent les différences peu notables des déterminations communiquées plus haut, différences qui (à l'exception de la 2e de A) ne s'élevaient généralement que de 1 à 4 milligrammes, représentant de 0°,024 à 0°,16. Mais quand l'appareil portant les thermomètres est descendu à une grande profondeur, bien qu'on puisse encore, avant de le remonter, lui imprimer quelques saccades, soin que nous n'avons jamais négligé, il est douteux que le petit choc ainsi produit soit toujours suffisant pour faire tomber la goutte. Du moins, les différences très sensibles des résultats qui seront rapportés plus loin n'admettent pas d'autre explication et montrent que l'exactitude espérée est loin d'avoir été réalisée [1]).

3°. Une troisième forme de thermomètre employée par nous est le thermomètre Casella Miller, que M. Buys-Ballot avait eu l'obligeance de mettre à notre disposition. Les seules expériences auxquelles nous ayons pu soumettre cet instrument ont consisté à vérifier ses deux points 0, par l'immersion dans la glace fondante, et à comparer ses degrés supérieurs avec ceux de trois autres bons thermomètres, dont deux (*a* et *b*) permettaient la vérification tant de leur point d'ébullition que de leur point 0, tandis que le troisième ne se prêtait qu'à la détermination du point de la glace fondante. Les deux points 0 du thermomètre Casella furent trouvés parfaitement justes, mais ceux de tous les autres thermomètres exigeaient une petite correction. Aussi bien sur le thermomètre Casella que sur les autres, les dixièmes

---

[1]) Peut-être réussirait-on à empêcher le retrait de la goutte dans l'intérieur du tube en plaçant, à une très petite distance au-dessous de l'orifice, une pointe ou une petite lame d'un métal pouvant s'amalgamer avec le mercure; l'adhésion des deux métaux vaincrait alors peut-être la cohésion des particules du mercure. Le temps nous a manqué pour soumettre cette idée au contrôle de l'expérience.

de degrés ne se laissaient évaluer que par estime, et l'expérience prouva que, faite séparément par chacun de nous, cette estime pouvait amener des différences de 0,1 et même 0,2 degré. Ces différences n'étaient pas imputables en totalité aux erreurs personnelles.

Les quatre thermomètres ayant été suspendus l'un à côté de l'autre dans une chambre où le soleil ne donnait pas, on nota leurs indications 12 fois par jour pendant 4 jours consécutifs, en ayant soin de commencer chaque fois par le thermomètre le plus sensible (*b*) et de finir par le plus paresseux (celui de Casella). Les résultats moyens furent :

Casella	14°,49
a	14 ,69
b	14 ,77
c	14 ,60

Ces mêmes thermomètres furent ensuite placés l'un à côté de l'autre dans un vase plein d'eau. Quatre lectures, faites dans un espace de deux heures, donnèrent comme résultats moyens :

Casella	15°,1
a	15 ,07
b	15 ,1
c	15 ,0.

En tenant compte de l'incertitude de l'estime, on peut donc conclure que, dans les degrés supérieurs aussi, le thermomètre Casella marchait d'accord avec d'autres bons thermomètres.

Il nous est resté quelques doutes quant au point de savoir si les deux index du thermomètre de Casella conservaient invariablement leur même place dans le tube, quand l'instrument passait de main en main et subissait par conséquent un mouvement. Le déplacement de ces index, s'il ne peut être nié avec une certitude absolue, était en tout cas si faible que les différences se confondaient avec les erreurs de l'estime.

Bien qu'avec le thermomètre de Casella nous n'ayons nullement atteint le degré d'exactitude que nous avions espéré des thermomètres à pesées, les observations faites à l'aide du premier nous paraissent pourtant mériter plus de confiance.

Les trois méthodes dont il vient d'être question pour la mesure des températures dans un puits foré ont toutefois un défaut commun, auquel il est difficile de remédier tant qu'on fait usage de thermomètres à maxima, qu'elle qu'en soit d'ailleurs la construction. Ce défaut, qui nous semble n'avoir pas suffisamment attiré l'attention jusqu'ici, est la conséquence de ce que, dans un trou de sonde, l'eau chaude des parties inférieures s'élève incessamment, tandis que l'eau plus froide du haut tend toujours à descendre. Il en résulte que dans la profondeur l'eau est un peu plus froide que le terrain environnant, et que dans les couches supérieures, au contraire, la température du sol doit être plus basse que celle de l'eau, à niveau égal. Si maintenant on introduit, dans une section du puits close de toutes parts, un thermomètre à maxima, celui-ci prendra bientôt la position qui correspond à la température momentanée de l'eau; mais l'abaissement ultérieur que cette température éprouvera dans les parties supérieures du puits, à mesure que l'eau cédera son excès de chaleur aux parois et au sol voisin, cet abaissement ne sera pas indiqué par l'instrument. Toutes les températures déterminées à l'aide de pareils moyens doivent donc, dans la moitié supérieure du puits, être un peu trop hautes. Pour les parties plus profondes, au contraire, cette faute n'existe pas, car l'eau y reçoit de la chaleur jusqu'à ce qu'elle se soit mise en équilibre de température avec le sol ambiant, de sorte que là le thermomètre ne peut jamais donner une indication trop forte.

La seule voie, croyons-nous, par laquelle on pourrait éviter cette faute, serait la mesure des températures au moyen d'un appareil thermo-électrique. Cette méthode permettrait de faire des observations en des points déterminés, et de les répéter jusqu'à ce que la température fût devenue constante. Il ne resterait plus alors qu'une seule cause d'erreur dans les résultats, à

savoir la transmission de la chaleur par le tuyau de fer qui revêt la paroi du puits; quant à cette cause, toutefois, nous ne voyons pas comment elle pourrait être écartée.

Comme la pointe ouverte de l'extrémité recourbée des thermomètres devait être maintenue dans l'air, et qu'au fond du puits la pression s'élevait environ à 36 atmosphères, l'appareil destiné à recevoir les thermomètres (fig. 2) fut disposé de façon qu'il y restât encore, même aux plus hautes pressions, un espace suffisant rempli d'air.

Le long d'une tige en laiton (*a b*), haute de 50 centimètres et épaisse de 1 centimètre, dressée excentriquement sur un disque circulaire en cuivre (*pq*) qui lui sert de pied, quatre anneaux (*c*, *d*, *e* et *f*) peuvent s'élever ou s'abaisser et être fixés au moyen de vis de pression. Chacun de ces anneaux porte une douille cylindrique; de ces douilles, deux (*d* et *e*) sont destinées à recevoir les thermomètres à pesées, et une (*c*) le géothermomètre, tandis que la quatrième (*f*), qui est la plus élevée, soutient un court tube de verre, fermé par en bas et servant à recueillir les gouttes de mercure qui s'écoulent des thermomètres. On fixait les douilles à une hauteur telle, que les parties horizontales des tubes thermométriques eussent leur bord supérieur au même niveau que la pointe de la tige en laiton. Quant au thermomètre Casella (*g h*), il était simplement attaché au support par le moyen d'un cordon.

L'appareil était ensuite recouvert d'un étui en cuivre *i k l m* (fig. 2 et 3) fermé par le haut, et qui avait à l'intérieur $50^{cm},1$ de hauteur, c'est-à-dire 1 millim. de plus que la tige, de sorte que les thermomètres ne couraient pas le risque d'être heurtés par le fond de l'étui, quand celui-ci était mis en place. La forme de l'étui est celle d'un cône allongé et tronqué. Il est facile de voir que cette forme mérite la préférence sur la forme cylindrique, attendu

qu'elle laisse à la colonne d'air comprimé une hauteur plus grande que cela ne serait le cas dans un étui ayant partout le même diamètre. Au bord inférieur de l'étui se trouvent, vis-à-vis l'une de l'autre, deux chevilles munies d'un filet de vis (*n* et *o*), qui passent par deux trous correspondants du disque, pratiqués près du bord de celui-ci. A l'aide de deux écrous, le disque est alors uni solidement à l'étui. Au centre du disque il y a une ouverture (*r*), qui donne accès à l'eau.

La suspension de cet appareil se faisait au moyen d'une espèce de cadre (fig. 3, *s t u v*) en fil de fer de 2 centim. d'épaisseur, contourné de manière à former un œil (*w*, *x*) en haut et en bas. L'appareil était assujetti dans le cadre par deux anneaux en fer (*a b* et *c d*) de diamètre différent, dont chacun était pourvu, en deux points opposés, d'une anse assez large pour glisser facilement sur le fil du cadre. Ce mode simple d'assujettissement nous a satisfait sous tous les rapports. Non-seulement il était solide, mais il permettait aussi d'introduire en peu d'instants l'appareil thermométrique dans son cadre, quand on voulait le descendre, et de l'en retirer rapidement après qu'il avait été remonté. Comme la température de l'air extérieur surpassait celle de l'eau dans les parties supérieures du puits, nous devions en effet, tant avant la descente qu'après la remonte, plonger l'appareil, c'est-à-dire l'étui avec les thermomètres qu'il contenait, dans la glace pendant quelques minutes. Cela était surtout nécessaire après la remonte, pour que, avant de déterminer le poids des thermomètres à pesées, on eût le temps de les munir de leurs godets à mercure.

La disposition adoptée pour isoler une colonne d'eau dans le puits, de façon que l'influence de l'eau plus chaude d'en bas et de l'eau plus froide d'en haut se fît sentir aussi peu que possible au voisinage de l'appareil thermométrique, consistait à adapter à celui-ci, vers le haut et vers le bas, une plaque de fer circulaire (*ef* et *gh*), unie à une plaque de caoutchouc épaisse de 4 millimètres (*ik* et *lm*). La plaque de fer était un peu plus petite que la section intérieure du tuyau de revêtement du puits; la plaque

de caoutchouc était au contraire un peu plus grande, de sorte qu'il fallut y faire quelques courtes entailles le long du bord, pour rendre possible le mouvement de descente et de remonte. Cela même, toutefois, fut reconnu insuffisant, et alors on pratiqua dans chacune des plaques deux ouvertures, que des soupapes à ressort (*n*, *o*, *p*, *q*) tiennent fermées quand l'appareil est au repos, mais qui s'ouvrent par paires dès qu'il monte ou descend dans l'eau.

Il n'en restait pas moins un frottement assez considérable entre la paroi interne du tuyau et le bord externe des disques de caoutchouc. Pour vaincre ce frottement lors de la descente, on fut obligé de suspendre encore à l'appareil, déjà assez lourd par lui-même, un poids (*r*) de 10 kilogrammes.

Pour monter et descendre l'appareil, on employait un fil de cuivre (*s*), qui avait une épaisseur de $1^{mm},5$ et une longueur totale de 390 mètres. Ce fil s'enroulait sur un tambour en bois, mis en mouvement à l'aide de deux manivelles. La circonférence du tambour mesurait juste 2 mètres, de sorte que, en veillant à ce que les spires du fil de cuivre vinssent se placer directement l'une contre l'autre, on savait chaque révolution entière correspondait à une ascension ou un abaissement de 2 mètres; les fractions étaient faciles à mesurer. Pour faciliter le comptage, on avait fixé au bâtis du tambour une petite cloche, dont le battant était soulevé à chaque révolution par une cheville implantée sur le tambour.

Lorsque le fil de cuivre eut pour la première fois été roulé en hélice sur le tambour, on traça avec un peu de soudure d'étain une ligne droite en travers de toutes les spires, puis la même opération fut répétée de l'autre côté, après une demi-révolution du tambour. De cette manière, tout le fil se trouvait divisé en sections de 1 mètre de longueur. En réalité, toutefois, cette division était superflue, et nous n'avons jamais eu besoin d'en faire usage. Elle servit seulement à montrer avec pleine évidence que le fil subissait un étirement à chaque descente et montée de l'appareil: en effet, les lignes de soudure, primitivement droites et transversales, prirent de plus en plus une direction oblique. On put constater

ainsi, à la fin des observations, que le fil entier s'était allongé d'environ 25 centimètres.

Du tambour, le fil passait sur une poulie de 60 centimètres de diamètre, disposée de façon que le fil, en la quittant, tombât droit sur le centre du puits.

Avant de commencer les expériences, on avait constaté que le fil pouvait porter une charge d'au moins 50 kilogrammes, c'est-à-dire, beaucoup plus que le poids de tout l'appareil. Néanmoins, d'après le conseil de M. Krecke, il y fut encore attaché une corde de 4 millim. d'épaisseur, qu'on laissait simplement filer lors de la descente. Il est très heureux que cette précaution ait été prise, car une fois il arriva, pendant la remonte, l'appareil se trouvant à plus de 200 mètres de profondeur, que le fil de cuivre se rompit et que la plus grande partie en retomba sur elle-même. L'appareil ne tenait alors plus qu'à la corde, et nous ne risquâmes pas de le remonter ainsi. Une autre corde, munie d'un croc, fut descendue, et, après environ une heure de tâtonnements, on réussit à saisir les replis du fil et à ramener celui-çi au jour. Cet accident peut servir de leçon à ceux qui voudraient recommencer les expériences avec le même appareil, ou avec un appareil analogue.

Tout l'appareil ci-dessus décrit — à l'exception seule des thermomètres à pesées — avait été construit, conformément à nos vues, par M. H. Olland, fabricant d'instruments de précision. Cela avait pris une couple de semaines. Le lundi, 21 avril, les observations purent commencer, et, pour les raisons dites plus haut, elles ne pouvaient être continuées au-delà du samedi soir, 26 avril. Nous résolûmes donc, vu la brièveté du délai accordé, de borner les déterminations de température à quelques points principaux. En laissant descendre le poids seul, attaché au fil, on reconnut que la partie inférieure du puits était remplie de sable. A partir seulement de la profondeur de 365 mètres, l'eau était assez claire pour qu'il n'y eût pas à craindre que du sable, venant se placer entre les soupapes, en entravât le fonctionnement.

Il fut décidé alors de déterminer la température à des profondeurs variant successivement de 100 mètres, c'est-à-dire, à 65, 165, 265 et 365 mètres.

Comme le temps pressait, l'appareil thermométrique ne put être laissé chaque fois dans la profondeur aussi longtemps que nous l'eussions désiré. Par l'aperçu suivant des résultats, on voit que la durée de ce séjour a varié entre $2\frac{1}{2}$ et 21 heures. Du reste, rien n'indique que cette différence ait eu une influence marquée sur les résultats de l'observation.

Première série.

Profondeur.	Durée du séjour dans le puits.	Thermomètre de Casella.	Thermomètres à pesées. A.	B.
65 mètres.	$2\frac{1}{2}$ heures.	12°,0	12°,1	11°,1
165 „	16 „	13 ,7	13 ,9	13 ,3
265 „	$2\frac{3}{4}$ „	15 ,4	15 ,3	14 ,1
365 „	17 „	17 ,7	17 ,1	16 ,7

Seconde série.

Profondeur.	Durée du séjour dans les puits.	Thermomètre de Casella.	Thermomètres à pesées. A.	B.	Géothermomètres.
65 mètres.	18 heures.	11°,8	11°,6	10°,9	
165 „	3 „	13 ,7	13 ,1	13 ,6	13°,4
265 „	21 „	15 ,3	15 ,3	15 ,0	
365 „	18 „	17 ,8	17 ,3	17 ,3	17 ,2

Moyennes.

Profondeur.	Thermomètre de Casella.	Thermomètres à pesées.	Maxima des thermomètres à pesées.
65 mètres.	11°,9	11°,55	12°,1
165 „	13 ,7	13 ,5	13 ,9
265 „	15 ,35	14 ,9	15 ,3
365 „	17 ,75	17 ,1	17 ,3

Accroissement de température pour 100 mètres.

	Thermomètre de Casella.	Thermomètres à pesées. Moyennes.	Maxima.
65—165 mètres.	1°,8	1°,95	1°,8
165—265 „	1 ,65	1 ,4	1 ,4
265—365 „	2 ,35	2 ,2	2 ,0

Accroissement de profondeur, en mètres, pour 1° d'accroissement de température.

	Thermomètre de Casella.	Thermomètres à pesées. Moyennes.	Maxima.
65—165 mètres.	55,6 mètres.	51,2 mètres.	55,6
165—265 „	60,6 „	71,4 „	71,4
265—365 „	42,6 „	45,5 „	50,0
sur la profondeur entière	51,7 „	54,5 „	57,7

Un coup d'œil jeté sur ces résultats montre immédiatement qu'on ne peut attribuer à tous une valeur égale. Ceux qui ont été obtenus au moyen des trois thermomètres à pesées offrent entre eux, à profondeurs égales, des différences si grandes qu'on ne peut y voir, évidemment, qu'une indication approximative de la température. La seule raison que nous puissions en donner est celle qui a été mentionnée à la page 468. Dans ce cas, le calcul des températures moyennes ne fournit lui-même rien de certain.

C'est pour cela que les températures maxima, qui pour la raison énoncée plus haut semblent réellement pouvoir prétendre à plus d'exactitude, ont aussi été ajoutées au tableau, dans une colonne particulière.

Les déterminations faites avec le thermomètre Casella nous paraissent mériter plus de confiance. Il est vrai qu'ici non plus les valeurs ne sont pas entièrement les mêmes dans les deux séries, mais leurs différences ne surpassent pas les erreurs inévitables attachées aux observations (voir p. 470).

Après les observations ci-dessus communiquées, nous avons encore fait avec le thermomètre Casella, mais sans employer l'appareil d'occlusion, quatre déterminations à des profondeurs moindres, savoir, à 55, 45, 35 et 25 mètres. Chaque fois le thermomètre, descendu au bout d'une corde, était laissé en place pendant un quart d'heure.

On a trouvé ainsi:

à 55	mètres	. . . . . 11°,5
„ 45	„	. . . . . 11 ,4
„ 35	„	. . . . . 11 ,2
„ 25	„	. . . . . 11 ,2

Comme à 65 mètres la température s'élevait à 11°,9, ces observations donnent un accroissement de 0°,7 pour 40 mètres, ce qui correspond à 1° pour 57 mètres.

Bien que ces dernières déterminations n'aient pas été faites avec les mêmes soins que les précédentes, elles confirment pourtant la conclusion que le rapport de l'accroissement de la température reste à peu près le même depuis le point de température constante jusqu'à une profondeur de 165 mètres.

Dans les 100 mètres qui suivent, le rapport de l'accroissement de la température est un peu moindre, mais, plus bas, il augmente de nouveau assez sensiblement. A la vérité, nous hésitons encore à regarder ce résultat comme établi et bien prouvé, d'une part parce que toutes les autres déterminations faites à la profondeur de 365 mètres restent un peu au-dessous de la température indiquée en ce point par le thermomètre Casella, et d'autre part parce que l'occasion nous a manqué de faire les expériences nécessaires pour savoir si, en dépit de la double paroi, la boule n'éprouve pas encore quelque compression sous une charge de 36 atmosphères.

Les autres thermomètres ayant toutefois présenté aussi, quoique à un degré moindre, des différences analogues, nous jugeons ces différences assez intéressantes pour attirer sur elles l'attention; elles montrent, en effet, que sur une profondeur de 365 mètres, dans le sol d'Utrecht, le rapport de

l'accroissement de la température ne diminue pas, en tout cas, d'une manière continue, ainsi qu'on l'a observé à Sperenberg, mais qu'au contraire, à un ralentissement local succède de nouveau une accélération, quand une profondeur plus grande est atteinte.

Les causes de ces différences sont du reste très obscures. Vu le grand éloignement de tout terrain pyroïde, on ne peut guère songer ici à des influences volcaniques. Il n'est pas probable non plus que des actions chimiques soient en jeu, attendu que le puits entier traverse un terrain composé de couches alternatives de limon, d'argile, de marne argileuse et de sable; nous ferons même remarquer, tout spécialement, que les quatre points où les déterminations thermométriques ont été faites sont tous situés au milieu d'épaisses couches de sable [1]).

La seule cause dont l'action pourrait être soupçonnée avec quelque vraisemblance, est le voisinage de la Mer du Nord, dont la plus grande profondeur, entre nos côtes et celles de l'Angleterre, est d'environ 66 mètres, mais qui, plus au nord et au sud, atteint des profondeurs notablement plus grandes.

Pour un sol aussi poreux que celui de notre pays, on conçoit que la liaison de l'eau extérieure avec l'eau qui imbibe le sol, puisse exercer une influence par laquelle la distribution des températures, dans celui-ci, serait légèrement modifiée.

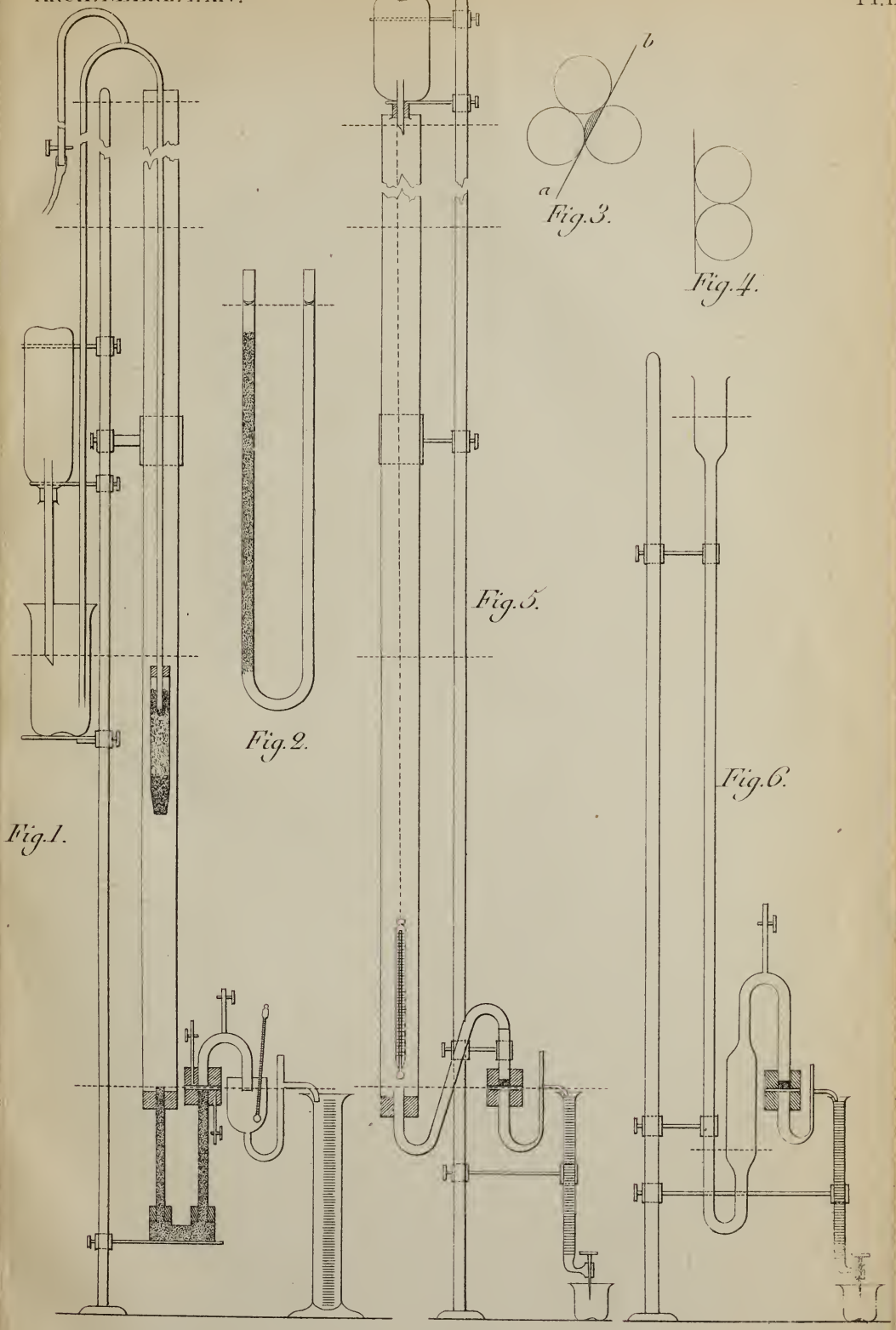
Nous avons trouvé que le niveau de l'eau dans le puits se maintient à $2^m,18$ au-dessus de l'orifice du tuyau de forage, lequel dépasse très peu la surface du sol; cette surface elle même, au point en question, est à environ $3^m,8$ au-dessus du zéro de l'échelle d'Amsterdam. Des 365 mètres sur lesquels s'étendent nos observations, il y en a donc 361,2 qui sont situés au-dessous du niveau moyen de la mer.

---

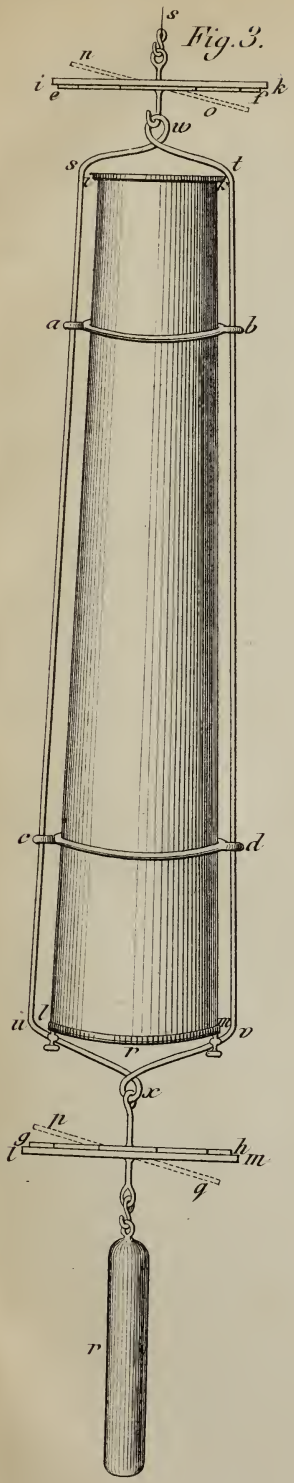
[1]) Notons ici que le terrain, par lequel le forage a passé, a, depuis la profondeur de 242 mètres jusqu'à la plus grande profondeur atteinte, celle de 369,5 mètres, par les fossiles qu'on y rencontre, une très grande analogie avec le système scaldisien des environs d'Anvers. C'est en tout cas un terrain pliocène.

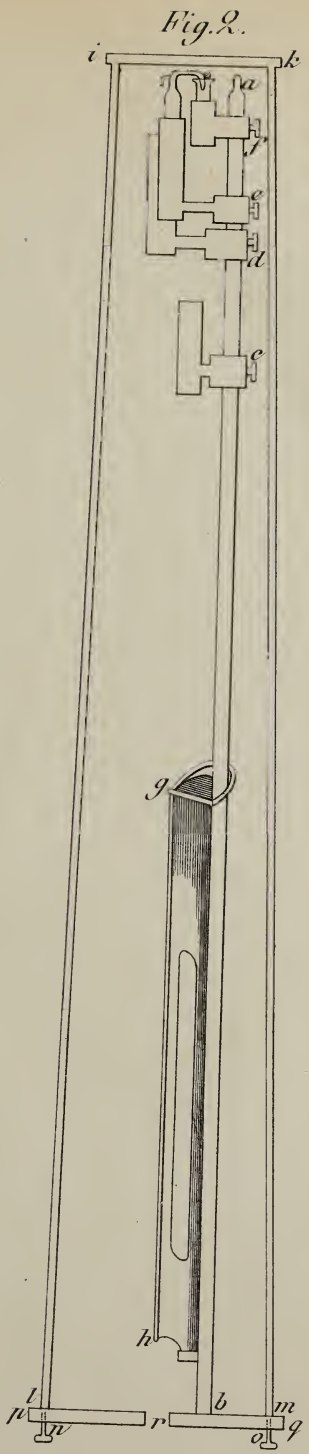
Dans presque toutes les recherches faites antérieurement sur l'accroissement de la température au sein de l'écorce terrestre, on a trouvé une progression notablement plus rapide. On sait, en effet, que cet accroissement est évalué, en moyenne, à environ 1° par 30 mètres, tandis qu'à Utrecht il n'a qu'un peu plus de la moitié de cette valeur. Il y donc des motifs sérieux de présumer que le voisinage de l'eau marine plus froide exerce ici de l'influence sur la température des couches supérieures du sol, mais que cette influence devient moins sensible quand on pénètre dans des couches très profondes, situées beaucoup au-dessous du lit de la mer.

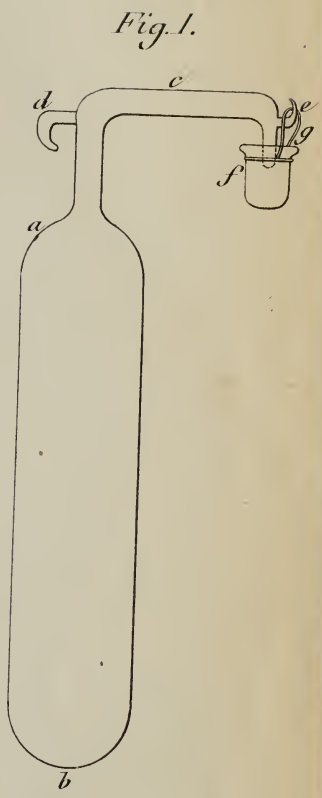
Il serait certainement à désirer que les doutes qui subsistent encore à ce sujet fussent entièrement levés par de nouvelles recherches, faites avec des moyens mieux appropriés, et notamment avec un appareil thermo-électrique. La possibilité d'entreprendre ces recherches reste ouverte pour l'avenir, attendu que l'administration communale a décidé de ne pas combler le puits, mais de le faire simplement recouvrir d'une dalle en pierre.



Lith. Emrik & Binge







Lith. Emrik & Binger.

CINQUIÈME LIVRAISON.

F. Seelheim, Les lois de la perméabilité du sol ..... Pag. 393.
P. Harting, Détermiations thermométriques faites dans un puits de 369 mètres de profondeur, à Utrecht..... " 463.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

H. HOLZER